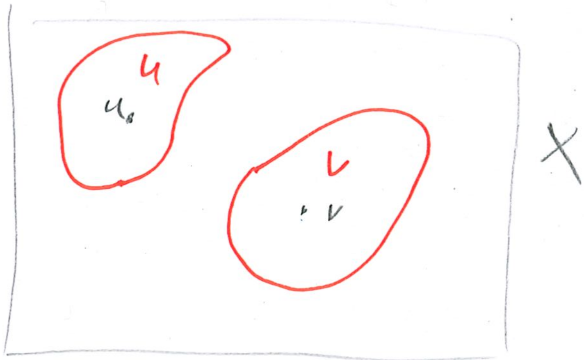
§2 Trennungsaxiome und Kompaktheit

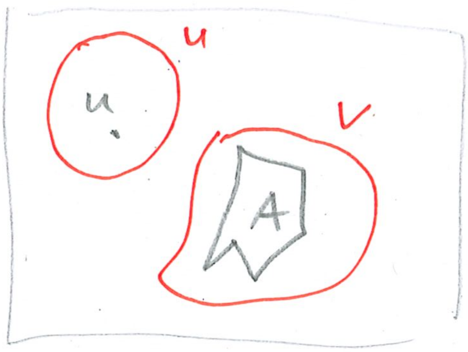
1. **Def** Sei X ein top. Raum.

(T_1) Wir nennen X ein T_1-Raum, wenn für jedes $u \in X$ die Menge $\{u\} \subseteq X$ abg. ist.

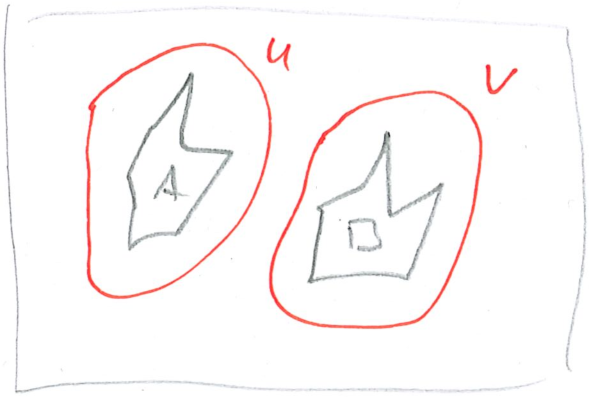
(T_2) Wir nennen X ein T_2-Raum oder Hausdorff-Raum, wenn es für alle $u, v \in X$ mit $u \neq v$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $u \in U$, $v \in V$ und $U \cap V = \emptyset$



(T_3) Wir nennen X ein T_3-Raum oder regulär, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn es für jedes $u \in X$, $A \subseteq X$ abg mit $u \notin A$ offene Mengen U, V gibt mit $u \in U$, $A \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$



(T_4) Wir nennen X ein <u>T_4-Raum</u> oder <u>normal</u>, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn es für alle $A, B \subseteq X$ abg. mit $A \cap B = \emptyset$ stets $U, V \subseteq X$ offen gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$



<u>Klar</u>:

$$\begin{tikzcd} T_4 \arrow[r, Rightarrow] & T_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_2 \\ & T_1 & \end{tikzcd}$$

<u>Lemma</u> Es gilt $T_2 \Rightarrow T_1$, also $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

<u>Beweis</u> Sei $u \in X$. Zu jedem $v \in X$, $v \neq u$ gibt es $W_v \subseteq X$ offen mit $u \notin W_v$, $v \in W_v$. Damit ist

$$X - \{u\} = \bigcup_{v \neq u} W_v \text{ offen.}$$

$\square$

<u>Achtung</u>: manche Autoren definieren "normal" und "regulär" anders (ohne T_1).

<u>Beispiel</u> (a) Die Klumptopologie auf $X = \mathbb{N}$ ist <u>nicht</u> T_1

(b) Die koendliche Topologie auf $X = \mathbb{N}$ ist T_1, aber nicht T_2.

Denn: Für $U, V \subseteq \mathbb{N}$, U, V offen in koendlich Topologie, $U, V \neq \emptyset$ gilt $U \cap V \neq \emptyset$.

2. Satz Jeder metrische Raum ist normal (also insbesondere regulär und Hausdorffsch).

Beweis Sei (X,d) metr. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt, $A \cap B = \emptyset$. Zu jedem $a \in A$ gibt es $\varepsilon_a > 0$ mit $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$. Zu jedem $b \in B$ gibt es $\varepsilon_b > 0$ mit $B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. Setze

$$U = \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon_a/2}(a) \qquad V = \bigcup_{b \in B} B_{\varepsilon_b/2}(b)$$

$\Rightarrow A \subseteq U$, $B \subseteq V$, U, V offen.

Beh: $U \cap V = \emptyset$. Denn wäre $z \in U \cap V$, so gäbe es $a \in A$, $b \in B$ mit $z \in B_{\varepsilon_a/2}(a) \cap B_{\varepsilon_b/2}(b)$

$$\Rightarrow d(a,b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} \Rightarrow d(a,b) < \varepsilon_a \text{ oder } d(a,b) < \varepsilon_b \ \lightning$$

$\square$

<u>Satz</u> Sei $(X,<)$ angeordnet. Dann ist die Ordnungstopologie Hausdorffsch.

<u>Beweis</u> Sei $u,v \in X$, $u \neq v$. OE $u<v$. Falls es z gibt mit $u<z<v$ setze $U=(-\infty,z)$, $V=(z,\infty)$. Falls es kein solches z gibt setze $U=(-\infty,v)$, $V=(u,\infty)$. □

<u>Bem</u> Die Ordnungstopologie ist sogar normal.

3. <u>Satz A</u> Sei X ein top. Raum, sei $\Delta X = \{(u,u) \mid u \in X\} \subseteq X \times X$. Dann sind äquivalent:

(i) X ist Hausdorffsch

(ii) $\Delta X \subseteq X \times X$ ist abg.

<u>Beweis</u> ΔX abg $\Leftrightarrow$ für alle $u,v \in X$ mit $u \neq v$ gibt es $U,V \subseteq X$ offen mit $(u,v) \in U \times V$ und $(U \times V) \cap \Delta X = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$. □

<u>Satz B</u> Sei X ein T_1-Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist regulär

(ii) für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $u \in U$ gibt es $V \subseteq X$ offen mit $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). Setze $A = X - U$ $\Rightarrow$ es gibt V,W offen mit $A \subseteq W$, $u \in V$, $V \cap W = \emptyset$. Es folgt $\overline{V} \subseteq X-W \subseteq X-A = U$. □

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $u \in X$, $A \subseteq X$ abg., $u \notin A$. Setze $U = X - A$, wähle V offen mit $u \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Setze $W = X - \overline{V}$ $\rightsquigarrow$ $A \subseteq W$ und $W \cap V = \emptyset$. $\square$

4. Satz Sei X ein T_m-Raum, $m = 1,2,3$. Sei $Y \subseteq X$ Teilraum. Dann ist auch Y ein T_m-Raum.

Beweis $m=1$: Sei $y \in Y$ $\rightsquigarrow$ $\overline{\{y\}} = \{y\} \Rightarrow \{y\} \subseteq Y$ ist abg. in Y.

$m=3$: Sei $y \in Y$ und $A \subseteq Y$ abg. in Teilraumtopologie, mit $y \notin A$. Dann ist $\overline{A} \cap Y = A$, also $y \notin \overline{A}$ $\rightsquigarrow$ es gibt $U, V \subseteq X$ offen mit $y \in U$, $\overline{A} \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$

$\rightsquigarrow$ $y \in \underbrace{U \cap Y}_{\text{offen in } Y}$ $\quad A \subseteq \underbrace{V \cap Y}_{\text{offen in } Y}$,

$m=2$: Wie $m=3$ mit $A = \{z\}$. $\square$

Bem Unterräume von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal, Beispiele sind kompliziert.

5. Satz Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie von top. Räumen, mit $I \neq \emptyset$ und $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.

Sei $m = 1,2,3$. Dann sind äquivalent:

(i) Jedes X_k ist ein T_m-Raum

(ii) $X = \prod_{i\in I} X_i$ ist ein T_m-Raum (in der Produkttopologie).

<u>Beweis</u> <u>(ii) ⇒ (i)</u>: Sei $k \in I$, wähle $z_i \in X_i$ für alle $i \in I$.

Sei $Y = \{ y \in X \mid y_i = z_i$ für alle $i \neq k \}$

Betrachte $f: X_k \longrightarrow Y$, $x \longmapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i = \begin{cases} z_i & i \neq k \\ x & i = k \end{cases}$

Dann ist f stetig (nach § 1.16) mit stetiger Inversen

$pr_k|_Y : Y \to X$, also ist Y homöomorph zu X_k.

Nach § 2.4 ist Y ein T_m-Raum, also auch X_k.

<u>(i) ⇒ (ii)</u>:

<u>$m = 1$</u>: Sei $z = (z_i)_{i\in I} \in X$, setze

$W_i = \{ w \in X \mid w_i \neq z_i \}$. Dann ist $W \subseteq X$ offen,

also ist $X - \{z\} = \bigcup_{i\in I} W_i$ offen. □

<u>$m = 3$</u>: Sei $z = (z_i)_{i\in I} \in X$ und $U \subseteq X$ offen mit

$z \in U$. Dann gibt es $I_0 \subseteq I$ endlich, $W_i \subseteq X_i$ offen

$W_i = X_i$ für $i \notin I_0$, $z \in W = \prod_{i\in I} W_i \subseteq U$.

Für jedes $j \in I_0$ wähle $V_j \subseteq W_j$ mit $z_j \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq W_j$

Für $j \in I - I_0$ setze $V_j = X_j$. Es folgt mit $\underbrace{V = \prod_{i \in I} V_i}_{\text{offen}}$

$$z \in V \subseteq \prod_{i \in I} \overline{V_i} \subseteq W \subseteq U.$$

Weiter ist $\prod_{i \in I} \overline{V_i}$ abgeschlossen, denn: setze $A_k = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_k \in \overline{V_k}\} \Rightarrow A_k$ abg und $\prod_{i \in I} \overline{V_i} = \bigcap_{k \in I} A_k$. $\square$

$m = 2$: Ähnlich wie $m = 3$. $\square$ #

Bem Produkt von normalen Räumen sind nicht unbedingt normal. • ZB $X = \mathbb{R}$ mit Sorgenfrey-Topologie, vgl. §1.6 $\Rightarrow$ X normal, $X \times X$ nicht normal ($\rightarrow$ Munkres).

• Ist I überabzählbar, so ist $\mathbb{R}^I$ nicht normal.

Normale Räume sind wichtig, weil es auf ihnen viele stetige reelle Funktionen gibt.

7. Def Sei X ein top. Raum, seien $A, B \subseteq X$ abg mit $A \cap B = \emptyset$. Eine stetige Abbildung $\varphi: X \to [0,1]$ heißt Urysohn-Funktion für (A, B) wenn $\varphi(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $\varphi(b) = 1$ für alle $b \in B$