§ 9 Stetige Abbildungen

1. Def Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x \in X$, wenn für jede Folge $(x_j)_{j\in J}$ in X mit Grenzwert $\lim\limits_{j\in J} x_j = x$ gilt: $\lim\limits_{j\in J} f(x_j) = f(x) = f(\lim\limits_{j\in J} x_j)$

Wenn f in jedem $x \in X$ stetig ist, so heißt f stetig. Wir setzen

$$C(X,Y) = \{ f: X \to Y \mid f \text{ ist stetig} \}$$

2. Beispiele (a) $X = Y = \mathbb{R}$, $d_X(u,v) = d_Y(u,v) = |u-v|$

f stetig gdw f stetig wie in Ana I, § 4.2.

(b) $(V, \|.\|)$ normierter Vektorraum, $X = V$,

$Y = \mathbb{R}$ $\quad d_X(u,v) = \|u-v\|$

$d_Y(s,t) = |s-t|$

Dann ist die Norm $\|.\|: V \to \mathbb{R}$ stetig.

<u>Beweis</u> Angenommen, $(u_j)_{j\in J}$ Folge von Vektoren,

$\lim_{j\in J} u_j = u$, d.h. $\lim_{j\in J} \|u-u_j\| = 0$.

Damit
$$\|u\| = \|u-u_j+u_j\| \le \|u-u_j\| + \|u_j\|$$
$$\|u_j\| = \|u_j-u+u\| \le \|u-u_j\| + \|u\|$$

also $\big|\|u\| - \|u_j\|\big| \le \|u-u_j\|$ folglich

$\lim_{j\in J} \|u_j\| = \|u\|$.

(c) <u>Variante davon.</u> (X,d) metrischer Raum, $p\in X$, $f(x) = d(p,x)$ $f: X\to\mathbb{R}$ ist stetig. (Beweis wie in (b).)

3. <u>Def</u> Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume, sei $L\in\mathbb{R}$, $L\ge 0$. Dann heißt $f: X\to Y$ <u>L-Lipschitz(*)-stetig</u>, wenn für <u>alle</u> $u,v\in X$ gilt
$$d_Y(f(u),f(v)) \le L\cdot d_X(u,v).$$

Dann ist f auch stetig: wenn $\lim_{j\in J} x_j = x$, so folgt $0 \le d_Y(f(x),f(x_j)) \le L\cdot d(x,x_j)$.

<u>Kurz:</u> L-Lipschitz stetig $\Rightarrow$ stetig.

(*) Rudolf Lipschitz, 1832-1903, dt. Mathematiker

<u>Beispiel</u> $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist stetig, aber <u>nicht</u> L-Lipschitz stetig (für ein $L \geq 0$).

$|(x+1)^2 - x^2| = |2x+1| \leq L(x+1-x) = L$ kann nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, egal wie groß L ist.

4. <u>Satz</u> Seien X, Y, Z metrische Räume. Wenn $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ stetig sind, dann auch $g \circ f: X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$.

<u>Beweis</u> Angenommen, $x = \lim_{j \in J} x_j$ in X. Da f stetig ist, gilt $f(x) = \lim_{j \in J} f(x_j)$. Setze $y_j = f(x_j)$, $y = f(x)$.

Da g stetig ist, folgt $g(y) = \lim_{j \in J} g(y_j)$, also

$$g(f(x)) = \lim_{j \in J} g(f(x_j)).$$

$\square$

5. <u>Beobachtung</u> Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, so ist $C(X, \mathbb{R}) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ein reeller Vektorraum und ein Ring wie folgt. Für $f, g \in C(X, \mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$

sind $f+g : x \longmapsto f(x)+g(x)$

$s \cdot f : x \longmapsto s \cdot f(x)$

sowie $f \cdot g : x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$ stetig, weil

$+$ und $\cdot$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind, vgl Ana I, § 4.4.

6. <u>Satz</u> <u>(Das ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)</u>

Seien X, Y metrische Räume und sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Sei $x \in X$.

Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x (wie in § 9.1)

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $v \in X$ mit $d_X(v,x) \le \delta$ gilt $d_Y(f(v), f(x)) \le \varepsilon$

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(x_j)_{j \in J}$ Folge in X mit $\lim\limits_{j \in J} x_j = x$, d.h. $\lim\limits_{j \in J} d_X(x, x_j) = 0$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $d_X(x, x_j) \le \delta$ für alle $j \ge m$.

Es folgt $d_Y(f(x), f(x_j)) \le \varepsilon$ für alle $j \ge m$,

also $\lim\limits_{j \in J} f(x_j) = f(x)$.

nicht (ii) $\Rightarrow$ nicht (i): Angenommen, (ii) ist nicht wahr. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für jedes $\delta > 0$ ein $u = u_\delta \in X$ existiert mit

$$d_X(x, u_\delta) \leq \delta \quad \text{aber} \quad d_Y(f(x), f(u_\delta)) > \varepsilon.$$

Speziell für $\delta = \frac{1}{j}$, $J = \{1, 2, 3, ..\}$

$u_j = u_\delta$ erhalte Folge $(u_j)_{j \in J}$ $d(x, u_j) \leq \frac{1}{j}$

also $\lim\limits_{j \in J} u_j = x$, aber $d_Y(f(x), f(u_j)) > \varepsilon$

$\Rightarrow$ f nicht stetig in x. $\Box$

7. Beispiel (a) $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$

$t = (t_1, .., t_n) \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt

$$f(x) = x_1 \cdot t_1 + x_2 \cdot t_2 + .. + x_n \cdot t_n$$

Solch ein f nennt man Linearform.

In l_2-Norm

$$|f(u) - f(v)| = \left| \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) t_i \right| \overset{\text{CSU}}{\leq} \|u - v\|_2 \cdot \|t\|_2$$

$L = \|t\|_2$

In l_1-Norm

$$|f(u)-f(v)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)t_i\right| \leq \|u-v\|_1 \cdot \|t\|_\infty$$

$L = \|t\|_\infty$.

In l_∞-Norm

$$|f(u)-f(v)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)t_i\right| \leq \|u-v\|_\infty \cdot \|t\|_1 \quad L = \|t\|_1$$

In allen drei Normen ist f also Lipschitzstetig (für verschiedenen $L \geq 0$).

(b) $X = C([a,b], \mathbb{R})$ mit Supremums-Norm

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

$$\varphi : X \to \mathbb{R}, \; \varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Es gilt für $f, g \in X$

$$|\varphi(f)-\varphi(g)| = \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

Ana I §5.16

$$\leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f-g\|_\infty\,dx = (b-a)\cdot\|f-g\|_\infty$$

Damit ist φ L-Lipschitzstetig für $L = b-a$.

(c) $X = Y = C([a,b], \mathbb{R})$ mit $\|.\|_\infty$-Norm

$f \in C([a,b], \mathbb{R})$, definiere

$\Psi(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$\Psi(f)(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ ("Integraloperator").

Es gilt für $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$

$$|\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)| = \left| \int_a^x (f(t) - g(t))\,dt \right|$$

$$\overset{\text{Ana I}\ \S 5.16}{\leq} \int_a^x |f(t) - g(t)|\,dt \leq \int_a^x \|f-g\|_\infty\,dt = (x-a) \cdot \|f-g\|_\infty$$

also $\|\Psi(f) - \Psi(g)\|_\infty \leq (b-a)\,\|f-g\|_\infty$, d.h.

$\Psi : C([a,b], \mathbb{R}) \to C([a,b], \mathbb{R})$ ist

L-Lipschitzstetig, $L = (b-a)$.

<u>Bemerkung</u> Die Abbildung φ in Bsp (b) und

Ψ in Bsp (c) sind <u>lineare</u> Abbildungen von

reellen Vektorräumen.

8. Satz Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) f ist L-Lipschitzstetig für ein $L \geq 0$

(iii) es gibt $L \geq 0$ so, dass $\|f(v)\|_W \leq L \cdot \|v\|_V$ für alle $v \in V$ gilt.

Beweis (iii) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, (iii) gilt. Dann ist

$$\|f(u) - f(v)\|_W \underset{f \text{ linear}}{=} \|f(u-v)\|_W \leq L \cdot \|u-v\|_V \quad (v)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) stimmt immer, vgl § 9.3

(i) $\Rightarrow$ (iii): mit ε-δ-Kriterium. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es $\delta > 0$ so, dass aus $\|\underbrace{v-0}_{=v}\|_V \leq \delta$ folgt $\|\underbrace{f(v)-f(0)}_{=f(v)}\|_W \leq 1$

Sei jetzt $v \in V$ beliebig.

Ist $v = 0$, so $f(v) = 0$.

Ist $v \neq 0$, so setze $r = \dfrac{\delta}{\|v\|_V} \rightsquigarrow \|r \cdot v\|_V = \delta$ also

$$1 \geq \|f(r \cdot v)\|_W = \frac{\delta}{\|v\|_V} \|f(v)\|_W, \text{ damit}$$

$$\|f(v)\|_W \leq \frac{1}{\delta} \|v\|_V \quad, \text{ setze } L = \frac{1}{\delta} \qquad \square$$

9. Def + Satz Sei $f: V \to W$ eine stetige lineare Abbildung zwischen normierten Räumen.
Wir definieren $\|f\| = \sup\left\{ \|f(v)\|_W \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in V \text{ mit} \\ \|v\|_V \leq 1 \end{array} \right\}$

(Die Menge rechts ist beschränkt nach § 9.8!)

Satz Für alle $v \in V$ gilt
$$\|f(v)\|_W \leq \|f\| \cdot \|v\|_V \quad ,$$ d.h. f ist $\|f\|$- Lipschitz stetig.

Beweis Für $v = 0$ ist $\|f(v)\|_W = 0 \leq \|f\| \cdot \|0\|_V = 0$.
Für $v \neq 0$ setze $r = \frac{1}{\|v\|_V} \leadsto \|r \cdot v\|_V = 1$

$\Rightarrow \|f(r \cdot v)\|_W \leq \|f\| \Rightarrow \|f(v)\| \leq \|f\| \cdot \|v\|_V$. $\square$

Man nennt $\|f\|$ die Operatornorm von f.

Satz Seien V, W normierte Vektorräume, sei
$\mathcal{L}(V,W) = \{ f: V \to W \mid f \text{ ist linear und stetig} \}$.
Dann ist $(\mathcal{L}(V,W), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.

Beweis Sei $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$, sei $s \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $f+g \in \mathcal{L}(V, W)$, $r \cdot f \in \mathcal{L}(V, W)$,

denn
$$\|(f+g)(v)\|_W \leq \|f(v)\|_W + \|g(v)\|_W$$
$$\leq (\|f\| + \|g\|)\, \|v\|_V$$
$$\|r \cdot f(v)\|_W = |r| \cdot \|f(v)\|_W \leq |r| \cdot \|f\| \cdot \|v\|_V$$

Es folgt $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Ist $\|f\| = 0$,

so folgt $\|f(v)\| = 0$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| \leq 1$,

also auch $\|f(sv)\| = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$, $\|v\| \leq 1$

also $f(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $f = 0$.

Damit $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (Nullabbildung).

Schließlich gilt für jedes $r \in \mathbb{R}$

$$\sup \{ \|r \cdot f(v)\|_W \mid \|v\|_V \leq 1 \} =$$
$$\sup \{ |r| \cdot \|f(v)\|_W \mid \|v\|_V \leq 1 \} = |r| \cdot \|f\|. \quad \square$$

Beispiel $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$. Jede lineare

Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist von der Form

$$f(v) = v_1 t_1 + v_2 t_2 + \dots + v_n \cdot t_n, \text{ für ein } (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

Damit ist f stetig bzgl $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

auf $\mathbb{R}^n$, also $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$

Die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$ ist

damit: $\|.\|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ $\|.\|_\infty$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

$\|.\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ $\|.\|_2$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

$\|.\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ $\|.\|_1$ auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

vgl. § 9.7 (a).

10. Satz Es seien $(V,\|.\|_V)$ und $(W,\|.\|_W)$ normierte Vektorräume. Wenn W ein Banachraum ist, dann ist auch $\mathcal{L}(V,W)$ (bzgl. der Operatornorm) ein Banachraum.

Beweis Vorüberlegung. Für $f,g \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \|f\| &= \|f-g+g\| \le \|f-g\| + \|g\| \\ \|g\| &= \|g-f+f\| \le \|g-f\| + \|f\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \big|\,\|f\|-\|g\|\,\big| \le \|f-g\|.$$

Sei $(f_j)_{j\in J}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(V,W)$, sei $v \in V$ beliebiger Vektor. Wegen

$\big|\,\|f_i\|-\|f_j\|\,\big| \le \|f_i-f_j\|$ ist $(\|f_j\|)_{j\in J}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, setze $L = \lim_{j\in J} \|f_j\|$.

Wegen $\|(f_i-f_j)(v)\| \le \|f_i-f_j\|\cdot\|v\|$ ist die Folge $(f_j(v))_{j\in J}$ eine Cauchyfolge in W.

Weil W vollständig ist, existiert der Grenzwert $w = \lim_{j\in J} f_j(v)$. Wir definieren $f(v) = \lim_{j\in J} f_j(v)$.

Für $u, v \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ beliebig gilt dann

$$\| f(u+rv) - f(u) - r\cdot f(v)\|_W \leq$$

$$\underbrace{\| F(u+rv) - f_j(u+rv)\|_W}_{\lim = 0} + \underbrace{\|f(u) - f_j(u)\|_W}_{\lim = 0} + \underbrace{\|f(rv) - r\cdot f_j(v)\|_W}_{\lim = 0}$$

gilt $f(u+rv) - f(u) - rf(v) = 0$, d.h. f ist linear.

Ist $u \in V$, $\|u\|_V \leq 1$, so folgt $\| f_j(u)\|_W \leq \|f_j\|$, also $\|f(u)\| \leq L = \lim_{j\in J}\|f_j\|$ $\Rightarrow$ f ist linear und stetig nach § 9.8 (*) □

11. Korollar Wenn $(V, \|.\|_V)$ ein normierter Vektorraum ist, so ist der Dualraum

$$V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = \{ f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ linear + stetig} \}$$

vollständig.

Beweis $(\mathbb{R}, |.|)$ ist vollständig nach Ana I, § 3.2 □

* Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_j - f_i\| \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq m$.

Es folgt für $u \in V$, $\|u\|_V = 1$, dass

$\|f_j(u) - f_i(u)\| \leq \varepsilon \rightsquigarrow \|f(u) - f_i(u)\| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|f - f_i\| \leq \varepsilon$ für $i \geq m$.

Also gilt $\lim\limits_{j \in J} f_j = f$.

12. <u>Beispiel</u> Sei P die Menge aller Polynomfunktionen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$,

sei $V = P \cap C([0,1], \mathbb{R})$ mit der $\|.\|_\infty$-Norm.

Der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx} : f \to \frac{df}{dx}$ ist <u>linear</u>

$$V \to V$$

$\left(\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(s \cdot f) = s \frac{df}{dx} \right)$ aber

<u>nicht stetig</u>: betrachte $p_n(x) = x^n$, $\|p_n\|_\infty = 1$

$$\frac{d p_n}{dx} = n x^{n-1} \quad \leadsto \quad \left\| \frac{d p_n}{dx} \right\| = n \cdot 1 = n \|p_n\|_\infty$$

Nach § 9.8 ist $\frac{d}{dx} : V \to V$ <u>nicht stetig</u> <u>bezüglich der $\|\,\|_\infty$-Norm</u>. $\square$

Man sagt, $\frac{d}{dx}$ ist ein <u>unbeschränkter Operator</u>. In der Quantenmechanik sind diese Operatoren ganz wichtig.

Wir überlegen jetzt, dass bei <u>endlich dimensionalen</u> Vektorräumen alles stetig wird.

13. Drei Lemmata

<u>Lemma A</u> Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum, sei $f: \mathbb{R}^n \to V$ linear. Dann ist f stetig bzgl der $\|.\|_1$-Norm auf $\mathbb{R}^n$.

<u>Bew.</u> Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, \ldots 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots 0)$. Für $u \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$u = (u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot e_i \implies f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot f(e_i),$$

also $\|f(u)\| \le \sum_{i=1}^{n} |u_i| \, \|f(e_i)\| \le \|u\|_1 \cdot L$,

$L = \max\{\|f(e_1)\|, \|f(e_2)\|, \ldots, \|f(e_n)\|\}$. □

<u>Lemma B</u> Sei $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein $r > 0$ so, dass für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\|_1 = 1$ gilt $\|u\| \ge r$.

<u>Bew.</u> Angenommen, das wäre falsch. Dann gibt es zu jedem $j \in J = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ einen Vektor $u_j \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u_j\|_1 = 1$ und $\|u\| \le \frac{1}{j}$.

Schreibe $u_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \ldots, u_{n,j})$

$\Rightarrow \quad |u_{k,j}| \leq 1 \quad$ für alle $\quad k = 1, \ldots, n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \in J.$

Nach Bolzano-Weierstraß (Ana I, § 2.21) gibt es eine Teilfolge $(u_j)_{j \in J_1}$, $J_1 \subseteq J$ unendlich so, dass $(u_{1,j})_{j \in J_1}$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $J_2 \subseteq J_1$ so, dass auch $(u_{2,j})_{j \in J_2}$ konvergiert usw $\Rightarrow$ Teilfolge $J_n \subseteq J$, so dass $(u_{k,j})_{j \in J_n}$ konvergiert, für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Setze $v_k = \lim\limits_{j \in J_n} u_{k,j}$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Es folgt $\|v\|_1 = 1$ (weil $\|u_j\|_1 = 1$, $\|.\|_1$ ist stetig nach § 9.2(b)). Nach Lemma A ist id stetig als Abbildung $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|)$, es folgt $\lim\limits_{j \in J_n} \|u_j - v\| = 0$, also $\|u_j - v\| \geq \big| \|v\| - \|u_j\| \big|$

$\Rightarrow \lim\limits_{j \in J_n} \|u_j\| = 0 = \|v\| \Rightarrow v = 0$. Aber $\|v\|_1 = 1$ ↯

$\square$

Lemma C Sei $\|.\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist $id : (\mathbb{R}^n, \|.\|) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ stetig.

Beweis Nach Lemma D gibt es $r > 0$ so, dass $\|u\| \geq r$ gilt für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\|_1 = 1$.

Ist $u \neq 0$, setze $s = \frac{1}{\|u\|_1}$. Dann ist $\|su\|_1 = 1$

$\|u\| = \frac{1}{s} \|s \cdot u\| \geq \frac{1}{s} \cdot r = \|u_1\| \cdot r$, also

$\|u\|_1 \leq \frac{1}{r} \cdot \|u\|$. Letzteres gilt auch für $u = 0$, also ist id stetig nach § 9.8 □

14. **Theorem** (Hauptsatz über endlich-dimensionale normierte Vektorräume).

Seien $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ normierte Vektorräume, sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Falls V endliche Dimension hat, so ist f stetig. Insbesondere sind alle linearen Abbildungen zwischen endlich dimensionalen reellen normierten Vektorräumen stetig.

<u>Beweis</u> Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V.

Wir definieren $h: \mathbb{R}^n \to V$ lineare Abbildung durch $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 + \dots + x_n b_n$.

Dann ist h ein <u>Isomorphismus</u> von Vektorräumen.

Wir definieren eine Norm $\|.\|_h$ auf $\mathbb{R}^n$ durch $\|x\|_h = \|h(x)\|$. Sei $g: V \to \mathbb{R}^n$ die Umkehrabbildung zu h, $g(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\|g(v)\|_h = \|v\|_V$

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V, \|.\|_V) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"', "\text{stetig}"] & (W, \|.\|_W) \\
(\mathbb{R}^n, \|.\|_h) \arrow[r, "\mathrm{id}", "\text{stetig nach Lemma G}"'] & (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \arrow[u, "f \circ h"', "\text{stetig nach Lemma A}"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

15. Def + Satz Sei V ein reeller Vektorraum. Zwei Normen $\|.\|_a$ und $\|.\|_b$ auf V heißen *äquivalent*, wenn es Zahlen $r, s \geq 0$ gibt so, dass für *alle* $v \in V$ gilt

$$\|v\|_a \leq r \cdot \|v\|_b$$

und $$\|v\|_b \leq s \cdot \|v\|_a.$$

[Dann ist automatisch $r, s > 0$! (wenn $V \neq 0$)]

Satz Auf einem *endlich dimensionalen* reellen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis Da $id : (V, \|.\|_a) \to (V, \|.\|_b)$ stetig ist (nach § 9.14) gibt es nach § 9.8 $s \geq 0$ mit $\|v\|_b \leq s \cdot \|v\|_a$, genauso gibt es $r \geq 0$ mit $\|v\|_a \leq r \cdot \|v\|_b$. $\square$

Folgerung Jeder endlich dimensionale normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

Denn: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ ist ein Banachraum nach § 8.16 (a).

Ist $h: \mathbb{R}^n \to V$ ein linearer Isomorphismus, so ist h stetig nach § 9.14, genauso ist die Umkehrabbildung $g: V \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ist $(v_j)_{j\in J}$ eine Cauchy-Folge in V, so konvergiert $(g(v_j))_{j\in J}$ in $\mathbb{R}^n$ gegen $u \in \mathbb{R}^n$. Dann konvergiert $(v_j)_{j\in J}$ gegen $v = h(u)$ $\square$

Im Beweis von § 9.13 Lemma B kam ein wichtiges Konzept vor, das wir jetzt betrachten.

16. <u>Def</u> Ein metrischer Raum (X,d) heißt <u>kompakt</u>, wenn <u>jede</u> Folge $(x_j)_{j\in J}$ in X eine konvergente Teilfolge hat.

<u>Bsp</u> $X = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ abg. Intervall $\leadsto$ X ist kompakt nach dem <u>Satz von Bolzano Weierstraß</u>.

17. <u>Satz</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ Teilmenge. Wenn (A,d) kompakt ist (als Unterraum von X) dann ist A abg. in X und vollständig.

<u>Beweis</u> Nach § 8.B reicht es zu zeigen, dass (A, d) vollständig ist. Sei $(a_j)_{j \in J}$ eine Cauchy-folge in A. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_j)_{j \in I}$ ($I \subseteq J$ unendlich) die konvergiert, $\lim_{i \in I} a_i = a \in A$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also $m \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

(1) $d(a_i, a_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $i, j \geq m$, $i, j \in J$

(2) $d(a, a_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $i \geq m$, $i \in I$.

Für $j \in J$, $j \geq m$ wähle $i \in I$ $i \geq m$ $\leadsto$

$$d(a, a_j) \leq d(a, a_i) + d(a_i, a_j) \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{j \in J} a_j = a \quad \square$$

18. <u>Satz</u> Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_X), (Y, d_Y). Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, so ist auch $B = f(A) \subseteq Y$ kompakt. Insbesondere ist $f(A)$ <u>abg. in Y</u>.

<u>Beweis</u> Sei $(b_j)_{j \in J}$ eine Folge in B. Wähle für jedes j ein $a_j \in A$ mit $f(a_j) = b_j$. Dann gibt es $I \subseteq J$ unendlich so, dass $(a_i)_{i \in I}$ konvergiert (weil A kompakt ist), $\lim_{i \in I} a_i = a$.

Da f stetig ist, folgt $\lim_{i \in I} b_i = f(a) \in B$ $\square$

19. <u>Satz</u> ("Bolzano-Weierstraß in mehreren Variablen").

Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum mit <u>endlicher</u> Dimension, sei $A \subseteq V$ Teilmenge.

Dann sind äquivalent:

(i) A ist kompakt

(ii) A ist abg. in V und <u>beschränkt</u>, d.h. es gibt $R > 0$ mit $A \subseteq B_R(0) = \{ u \in V \mid \|u\| \leq R \}$

<u>Beweis</u> A kompakt $\Rightarrow$ $A \subseteq V$ abg. nach § 9, 17. (v)

<u>Beh</u>: <u>A nicht beschränkt $\Rightarrow$ A nicht kompakt.</u>

Denn: A nicht beschränkt $\Rightarrow$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a_n \in A$ mit $\|a_n\| \geq n$. Ist $I \subseteq \mathbb{N}$ unendlich, so ist $(\|a_i\|)_{i \in I}$ divergent, also konvergiert auch $(a_i)_{i \in I}$ <u>nicht</u>. $\square$

Damit ist gezeigt: (i) $\Rightarrow$ (ii).

Jetzt zeigen wir: (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, sei $(a_j)_{j \in J}$ eine Folge in A. Schreibe $a_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} v_k$

$a_{k,j} \in \mathbb{R}$.

Nach §9.15 sind alle Normen auf V äquivalent.
Definieren wir $\|u\|_1 = |u_1| + \dots + |u_n|$, wobei $u = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$, so folgt: es gibt $L \geq 0$ mit $\|u\|_1 \leq L \cdot \|u\|$.

Da A beschränkt ist bzgl. $\|.\|$, ist A auch beschränkt bzgl. $\|.\|_1$. Insbesondere sind die n Folgen $(a_{k,j})_{j \in J}$ $k = 1, \dots, n$ beschränkt.

Wie im Beweis von §9.13, Lemma B, finden wir $J_n \subseteq J$ so, dass die Folge $(a_{k,j})_{j \in J_n}$ konvergieren, $k = 1, \dots, n$. Setze $a_k = \lim_{j \in J_n} a_{k,j}$, und $a = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Dann gilt $\lim_{j \in J_n} \| a - a_j \|_1 = 0$ damit auch $\lim_{j \in J_n} \| a - a_j \| = 0$, d.h. $\lim_{j \in J_n} a_j = a$. $\square$

20. Theorem Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ kompakte Teilmenge. Wenn $f: X \to \mathbb{R}$ stetig ist, so nimmt f auf A ein Minimum s und ein Maximum t an, d.h. es gibt $a, b \in A$ mit $f(a) = s$, $f(b) = t$ und $s \leq f(c) \leq t$ für alle $c \in A$ ($f(A) \subseteq [s, t]$).

Beweis Da f stetig ist und A kompakt, ist auch $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt nach §9.18. Nach §9.19 ist $f(A)$ abg. in $\mathbb{R}$ und beschränkt. Setze $s = \inf(f(A))$ und $t = \sup(f(A))$. Da $f(A)$ abg ist in $\mathbb{R}$, folgt $s, t \in f(A)$. $\square$

Fazit
- stetige lineare Abbildungen sind Lipschitz-stetig.
- lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen normierten Vektorräumen sind stetig
- in $\mathbb{R}^n$ sind Teilmengen genau dann kompakt, wenn sie abg. und beschränkt sind.
- alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.
- die drei vorigen Punkte sind nicht wahr in unendlich-dimensionalen normierten Vektorräumen.

21. Def + Satz

Ist $f: X \to X$ eine Abbildung und ist $p \in X$ mit $f(p) = p$, so heißt p Fixpunkt von f.

Bsp $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, Fixpunkte sind $0, 1$
$X = \mathbb{R}$, $g(x) = x+1$ hat keinen Fixpunkt.

Theorem (Banachs Fixpunktsatz). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, sei $f: X \to X$ L-Lipschitzstetig mit $0 \le L < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt p.

Beweis (a) Es gibt höchstens einen Fixpunkt.

Denn: angenommen, $f(p) = p$, $f(q) = q$.
Dann gilt $d(p,q) = d(f(p), f(q)) \le L \cdot d(p,q)$
mit $L < 1 \Rightarrow d(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$.

(b) Es gibt einen Fixpunkt

Denn: Wähle $x_0 \in X$ beliebig, definiere rekursiv $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Setze $d(x_0, x_1) = r$. Wegen $d(x_{k+1}, x_{k+2}) \leq L \cdot d(x_k, x_{k+1})$ folgt rekursiv $d(x_k, x_{k+1}) \leq L^k \cdot r$

Ist $m, l \in \mathbb{N}$, so folgt also

$$d(x_m, x_{m+l}) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{m+l-1}, x_{m+l})$$
$$\leq L^m \cdot r + L^{m+1} \cdot r + \dots + L^{m+l-1} \cdot r$$
$$= L^m \cdot r \left(L^0 + L^1 + \dots + L^{l-1}\right)$$
$$\leq L^m \cdot r \cdot \frac{1}{1-L} \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

Nach Ana I, § 3.4 ist $(L^m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} L^m = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $m \geq 0$ so, dass $L^m \cdot \frac{r}{1-L} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Für $k, l \geq m$ folgt

$$d(x_k, x_l) \leq d(x_m, x_k) + d(x_m, x_l) \leq 2 \cdot L^m \frac{r}{1-L} \leq \varepsilon$$

d.h. $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in X.

Setze $p = \lim\limits_{m \in \mathbb{N}} x_m$. Es folgt $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} d(x_m, x_{m+1}) = 0$

$$= \lim_{m \in \mathbb{N}} d(x_m, f(x_m)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig}}}{=} d(p, f(p)) \Rightarrow f(p) = p$$

$\square$

<u>Bemerkung</u>: Der Beweis liefert ein <u>Näherungsverfahren</u> zur Berechnung von $p = \lim_{m\in\mathbb{N}} x_m$, mit

<u>Fehlerabschätzung</u> $d(x_m, p) \le L^m \cdot \dfrac{d(x_0, x_1)}{1-L}$

8.2. <u>Beispiel</u> Sei $X = [1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x\}$ $\subset$ vollständig

$f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(x) = x \iff x^2 = 2$

(a) <u>Für $x \ge 1$ ist $f(x) \ge 1$.</u>

Denn: $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ und dann

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \ge 1 \overset{(x>0)}{\iff} \frac{x^2}{2} + 1 \ge x \iff x^2 + 2 - 2x \ge 0$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 + 1 \ge 0 \iff (x-1)^2 + 1 \ge 0 \quad (\checkmark)$$

(b) <u>f ist $\frac{1}{2}$-Lipschitzstetig</u>

$$|f(u) - f(v)| = \left| \frac{u-v}{2} + \frac{v-u}{uv} \right| = |u-v| \cdot \underbrace{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{uv} \right|}_{\le \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} - uv \le \frac{1}{2} \iff \frac{1}{uv} \ge 0 \quad (\checkmark)$$

$$uv - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \iff \frac{1}{uv} \le 1 \iff 1 \le uv \quad (\checkmark)$$

(weil $u, v \ge 1$.)

Also sind die Voraussetzungen des Banachschen FPS erfüllt, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig und $[1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist abg. in $\mathbb{R}$, also ebenfalls vollständig, vgl § 8.13 (b).

Zum Beispiel: $x_0 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$,

$$r = d(x_0, x_1) = \frac{18}{12} - \frac{17}{12} = \frac{1}{12}$$

$$d(\sqrt{2}, x_m) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{12} \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-m} \cdot \frac{1}{6}$$

Für $m = 10$ ist $d(\sqrt{2}, x_{10}) \leq 2^{-10} \cdot \frac{1}{6} \approx 0.000163$