§ 11. Differentialrechnung in Vektorräumen

1. Def. Seien V, W normierte Vektorräume, sei $U \subseteq V$ offen, sei $f : U \to W$ eine Abbildung. Dann heißt f differenzierbar in $u \in U$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(u) \subseteq U$ sowie eine linear stetige Abbildung $g : V \to W$ und eine Abbildung $\lambda : B_\varepsilon(0) \to W$ mit $\lambda(0) = 0$ die stetig ist in $h = 0$, mit

$$f(u+h) = f(u) + g(h) + \|h\| \cdot \lambda(h)$$

für alle $h \in B_\varepsilon(0) \subseteq V$

Dann ist g eindeutig bestimmt und

$Df(u) = g : V \to W$ heißt Ableitung von f in u, $Df(u) \in \mathcal{L}(V, W)$

⌈ Beweis der Eindeutigkeit: ist $\tilde{g}$ weitere linear stetige Abbildung, so folgt für $h \in B_\varepsilon(0)$

und $t \in (0,1)$, dass

$$(g - \tilde{g})(th) = (\tilde{\lambda}(th) - \lambda(th))\,\|th\|$$

$$\leadsto (g-\tilde{g})(h) = \underbrace{(\tilde{\lambda}(th) - \lambda(th))}_{\text{beliebig klein für } t \to 0}\,\|h\|$$

$\leadsto$ $g - \tilde{g}(h) = 0$ für alle $h \in B_\varepsilon(0)$

$\leadsto$ $g - \tilde{g} = 0$, vgl § 10.14. ┘

Falls f in jedem $u \in U$ diff'bar ist, so heißt f differenzierbar auf U. Falls weiter die Abbildung

$$U \to \mathcal{L}(V,W), \quad u \mapsto Df(u)$$

stetig ist, heißt f stetig differenzierbar.

Dabei trägt $\mathcal{L}(V,W)$ die Operatornorm, vgl. § 9.9.

2. Vergleich mit Ana I (bzw Schule) und mit Kapitel 10.

(a) $K \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: K \to \mathbb{R}$ diff'bar in Punkt $p \in K$ mit Ableitung $f'(p)$, vgl Analysis I, § 6.3

reelle Zahl

Hier ist $V = W = \mathbb{R}$ (1-dimensionale Vektorraum)

und $Df(p): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$Df(p)(v) = f'(p) \cdot v$ für $v \in V = \mathbb{R}$

(b) $K \subseteq V = \mathbb{R}$ offen, $c: K \to W$ Kurve, $p \in K$, Geschwindigkeit $\dot{c}(p)$, vgl. §10.9

$Dc(p): \mathbb{R} \to W$ ist gegeben durch

$Dc(p)(v) = v \cdot \dot{c}(t)$ $v \in V = \mathbb{R}$

(c) $U \subseteq V$ offen, $W = \mathbb{R}$, $f: U \to \mathbb{R}$ mit Differential $df(p): V \to \mathbb{R}$, hier ist

$Df(p)(v) = df(p)(v)$

"großes D ist kleines d". Manche Bücher schreiben immer $df(p)$ statt $Df(p)$ und nennen $Df(p)$ Differential.

3. <u>Beispiel</u> Ist $f: V \to W$ linear und stetig, so ist f stetig diff'bar in jedem $p \in V$ mit Ableitung

$Df(p) = f$

Beweis $f(p+h) - f(p) = f(h) \Rightarrow$
$$f(h) = Df(p)(h)$$
$\square$

4. Bsp $V = C([0,1], \mathbb{R})$ mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$,

$\varphi : V \to V$, $\varphi(f) = f^2$ d.h.

$\varphi(f)(t) = f(t)^2$ für $t \in [0,1]$

"Quadrierfunktion"

$\varphi(f+h) = (f+h)^2 = f^2 + 2f \cdot h + h^2$ $f, h \in V$

Setze $D\varphi(f)(h) = 2 \cdot f \cdot h$

$[D\varphi(f)(h)(t) = 2 \cdot f(t)\, h(t)]$

$$\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{\|h\|_\infty} \cdot h^2 & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$$

$\|\lambda(h)\|_\infty = \|h\|_\infty \Rightarrow \lambda$ stetig in $h = 0$ und

φ ist damit diff'bar auf V.

5. <u>Satz</u> Seien V, W normierte Vektorräume, sei $U \subseteq V$ offen; sei $s \in \mathbb{R}$, $p \in U$. Seien $f, g : U \to W$ Abbildungen, beide diff'bar in $p \in U$. Dann gilt:

(a) f (und g) sind stetig in p.

(b) $f+g : U \to W$, $u \mapsto f(u) + g(u)$ ist diff'bar in p, $D(f+g)(p) = Df(p) + Dg(p)$

(c) $s \cdot f : U \to W$ $u \longmapsto sf(u)$ ist diff'bar in p, $D(s\cdot f)(p) = s \cdot Df(p)$

<u>Beweis</u> Schicke

$$f(p+h) = f(p) + Df(p)(h) + \lambda(h)\cdot\|h\|$$

$$g(p+h) = g(p) + Dg(p)(h) + \mu(h)\cdot\|h\|$$

λ, μ stetig in $h=0$, $\lambda(h) = \mu(h) = 0$

(a) $\|f(p+h) - f(p)\| \leq \|Df(p)\|\cdot\|h\| + \|\lambda(h)\|\cdot\|h\|$

$\leadsto$ stetig in $h=0$

(b) $$(f+g)(p+h) = (f+g)(p) + (Df(p) + Dg(p))(h) + (\lambda(h) + \mu(h))\cdot\|h\|$$

$\lambda+\mu$ stetig in $h=0$ und $\lambda(0)+\mu(0) = 0$

(c) $(\alpha f)(p+h) = \alpha f(p) + \alpha \cdot Df(p)(h) + \alpha\lambda(h)\|h\|$

$\alpha\lambda(0) = 0$ und $\alpha\cdot\lambda$ ist stetig in $h=0$ $\square$

6. <u>Satz</u> (<u>Die Kettenregel</u>) Seien V_1, V_2, V_3 normierte Vektorräume, $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$ offen, $f: U_1 \to U_2$ sowie $g: U_2 \to V_3$ Abbildungen. Falls f in $p \in U_1$ diff'bar ist und falls g in $f(p) \in U_2$ diff'bar ist, so ist $g\circ f$ in p diff'bar, mit Ableitung

$$D(g\circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p)$$

<u>Beweis</u> Sei $q = f(p)$, schließlich

$$f(p+h_1) = f(p) + Df(p)(h_1) + \lambda(h_1)\|h_1\| \quad h_1 \in V_1$$

$$g(q+h_2) = g(q) + Dg(q)(h_2) + \mu(h_2)\|h_2\| \quad h_2 \in V_2$$

$$g(\underbrace{f(p+h_1)}_{q+h_2}) = g(f(p)) + Dg(q)(h_2) + \mu(h_2)\|h_2\|$$

$$= g(f(p)) + Dg(f(p))(f(p+h_1) - f(p))$$

$$+ \mu(f(p+h_1) - f(p))\|f(p+h_1) - f(p)\|$$

$= g(f(p)) + Dg(f(p))(Df(p)(h_1))$

$$\begin{cases} + Dg(f(p))(\lambda(h_1)\cdot\|h_1\|) \\ + \mu(Df(p)(h_1) + \lambda(h_1)\|h_1\|)\,\underbrace{\|Df(p)(h_1) + \lambda(h_1)\|h_1\|\|}_{\leq \|Df(p)\|\cdot\|h_1\| + \|\lambda(h_1)\|\cdot\|h_1\|} \end{cases}$$

$\to$ stetig in $h_1 = 0$ und dort $= 0$ $\square$

7. Satz Sei V normiert Vektorraum, $U \subseteq V$ offen.

Sei $f: U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Schreibe

$F(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u))$

$f_k: U \to \mathbb{R}$. Sei $p \in U$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist diff'bar in p

(ii) $f_1, \dots, f_n$ sind diff'bar in p.

In diesem Fall ist für $h \in V$

$$Df(p)(h) = (df_1(p)(h), \dots, df_n(p)(h))$$

Beweis Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$.

Dann ist $F(u) = \sum_{k=1}^{n} f_k(u)\cdot e_k$

Falls $f_1, \dots, f_n$ diff'bar in p, so auch

$u \mapsto f_k(u) \cdot e_k$, also auch f (linear ... Kettenregel)

Falls f diff'bar in p, so auch

$$pr_k \circ f : u \mapsto pr_k(f(u)) = f_k(u)$$

$$pr_k(v_1, \dots, v_n) = v_k \quad \text{(linear ... Kettenregel)}$$

$$D(pr_k \circ f)(p) = pr_k \, Df(p) = df_k(p)$$

und $f(u) = \sum_{k=1}^{n} f_k(u)\, e_k = \sum_{k=1}^{n} (pr_k \circ f)(u)\, e_k$ $\square$

8. <u>Korollar</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ diff'bar in $p \in U$, so gilt mit

$f(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))$, dass

$h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^n$

$$Df(p)(h) = (df_1(p)(h), \dots, df_n(p)(h)) \quad \text{und}$$

$$df_k(p)(h) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p)\, h_j \quad \text{oder kurz}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix von } f \text{ in } p} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = Df(p)(h)$$

9. <u>Höhere Ableitungen</u> Sind V, W normierte Vektorräume, $U \subseteq V$ offen, $f : U \to W$ diff'bar, so kann man die Differenzierbarkeit von $Df : U \to \mathcal{L}(V, W)$ betrachten. Die zweite Ableitung ist dann $D(Df) = D^2 f$ usw.

Setze $C^k(U, W) = \{ f : U \to W \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar} \}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$ sowie $C^\infty(U, W) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U, W)$,

diese Funktionen heißen <u>glatt</u>.

Wir betrachten die 2. Ableitung genauer,

$D^2 f(p) \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W))$ d.h. für $v_1 \in V$ ist $D^2 f(p)(v_1) \in \mathcal{L}(V, W)$. Sei $v_2 \in V$,

Betrachte $D^2 f(p)(v_1)(v_2) \in W$

Die Abbildung $D^2 f(p)$ ist linear in v_1 <u>und</u> linear in v_2, d.h. $D^2 f(p)$ ist eine <u>bilineare Abbildung</u>

$$D^2 f(p) : V \times V \longrightarrow W.$$

Diese Bilinearform heißt auch <u>Hesse-Form</u> von f, $\mathbb{H} f(p)(v_1, v_2) = D^2 f(p)(v_1)(v_2)$

<u>Beispiel</u> $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ wie in Analysis I. Hier $V = W = \mathbb{R}$ und für $p \in U$ ist

$$HF(p)(v_1, v_2) = f''(p)\cdot v_1 \cdot v_2 \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

10. Die <u>Hesse-Matrix</u>. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}$ in $C^2(U,\mathbb{R})$

$$\nabla F(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\,dx_n = Df(p)$$

$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$$Df(p)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\,v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\,v_n$$

$$= \langle \nabla f(p) \mid v \rangle$$

Betrachte $c(t) = p + tu \qquad \dot{c}(t) = u$

$$D^2 f(p)(v)(\dot{c}(t)) = \frac{d}{dt} DF(c(t))(v) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(c(t))\,v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c(t))\,v_n\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t))\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t))\,u_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t))\,u_n$$

Damit $$\boxed{HF(p)(u,v) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(p)\,u_k v_l}$$

$$= (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Die $n \times n$-Matrix $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(p) \right)_{k,\ell=1}^{n}$ heißt Hesse-Matrix

von f im Punkt p.

11. Beispiele (a) $f(p_1, p_2) = p_1^2 + p_2^2 \quad p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$

$\nabla f(p) = (2p_1, 2p_2)$

$Hf(p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $f(p_1, p_2) = p_1 \cdot \cos(p_2)$

$\nabla f(p) = (\cos(p_2), -p_1 \cdot \sin(p_2))$

$Hf(p) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(p_2) \\ -\sin(p_2) & -p_1 \cos(p_2) \end{pmatrix}$

(c) $f(p_1, p_2) = p_1^3 \cdot p_2^5$

$\nabla f(p) = (3 p_1^2 p_2^5, 5 p_1^3 p_2^4)$

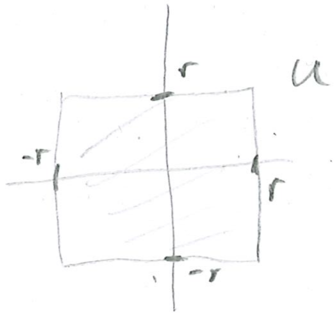
$Hf(p) = \begin{pmatrix} 6 \cdot p_1 \cdot p_2^5 & 15 \cdot p_1^2 \cdot p_2^4 \\ 15 \cdot p_1^2 \cdot p_2^4 & 20 \cdot p_1^3 p_2^3 \end{pmatrix}$

<u>Beobachtung</u>: In den Beispielen ist die Hessematrix <u>symmetrisch</u>, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(p)$.

Das ist kein Zufall.

12. <u>Lemma</u> Sei $r > 0$, $U = \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |p_1|, |p_2| < r \}$

sowie $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.



Dann gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$.

<u>Beweis</u> Betrachte $\alpha(s) = f(s, p_2) - f(s, 0)$

MWS $\rightsquigarrow$ $\alpha(p_1) - \alpha(0) = \alpha'(s_0) \cdot p_1$ für ein s_0

mit $0 < s_0 < p_1$ d.h.

$$f(p_1, p_2) - f(p_1, 0) - f(0, p_2) + f(0,0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(s_0, p_2)\, p_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(s_0, 0)\, p_1$$

Jetzt $\beta(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(s_0, t)$

MWS $\rightsquigarrow$ $\beta(p_2) - \beta(0) = \beta'(t_0)\, p_2$ für ein t_0 mit $0 < t_0 < |p_2|$

d.h. $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(s_0, p_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(s_0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(s_0, t_0) \cdot p_2$$

Insgesamt also

$$f(p_1,p_2)-f(p_1,0)-f(0,p_2)+f(0,0)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(s_0,t_0)\cdot p_1\cdot p_2 \qquad \text{mit} \quad 0<s_0<p_1, \quad 0<t_0<p_2 \quad \#$$

Entsprechende Rechnung in umgekehrter Reihenfolge ergibt

$$f(p_1,p_2)-f(0,p_2)-f(p_1,0)+f(0,0)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\tilde{s}_0,\tilde{t}_0)\cdot p_1\cdot p_2 \qquad \text{mit} \quad 0<\tilde{s}_0<p_1, \quad 0<\tilde{t}_0<p_2$$

d.h.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\tilde{s}_0,\tilde{t}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(s_0,t_0)$$

$$0<s_0,\tilde{s}_0<p_1$$
$$0<t_0,\tilde{t}_0<p_2$$

Jetzt $p_1=p_2=\frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\dots$

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$ stetig sind, folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0,0) \qquad \square$$

13. Theorem (Satz von Schwarz)

(H. A. Schwarz, 1843 - 1921)

Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subset V$ offen und sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $p \in U$, $u, v \in V$

$$Hf(p)(u,v) = Hf(p)(v,u)$$

d.h. die Hesse-Form ist symmetrisch,

$$D^2 f(p)(u)(v) = D^2 f(p)(v)(u).$$

Beweis Betrachte $g(s,t) = f(p + s\cdot u + t \cdot v)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(s,t) = Df(u + su + tv)(u)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(s,t) = Df(u + su + t\cdot v)(v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = D^2 f(p)(u)(v)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = D^2 f(p)(v)(u)$$

Nach Lemma 12 gilt $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0)$ $\square$

<u>Korollar</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ist $f \in C^2(U,\mathbb{R})$, so gilt für alle $p \in U$, $1 \le k,l \le n$ dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(p)$$

□

14. Anwendung: Vektorfelder und Potentiale

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt auch <u>Potential</u> und eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>Vektorfeld</u>.

<u>Problem</u> Wenn $g \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld ist, gibt es dann ein Potential $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ mit $\nabla f = g$?

Falls es solch ein Potential f gibt, so folgt aus $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(p) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k}(p)$, dass

$$(*) \quad \frac{\partial g_l}{\partial x_k}(p) = \frac{\partial g_k}{\partial x_l}(p) \quad \text{für alle } k,l$$

15. **Bsp** (a) $g(p_1, p_2) = (p_1, 2 \cdot p_1 p_2)$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(p) = 0 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(p) = 2p_2$$

$\Rightarrow$ es gibt kein Potential f mit $\nabla f = g$

(b) $g(p_1, p_2) = (p_2^2, 2p_1 p_2)$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(p) = 2p_2 = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(p) = 2p_2$$

Tatsächlich gibt es hier ein Potential, nämlich

$$f(p_1, p_2) = p_1 p_2^2, \quad \nabla f(p) = (p_2^2, 2p_1 p_2)$$

Ob die Bedingung ⊛ hinreichend für die Existenz eines Potentials ist, hängt sehr stark von der "Gestalt" von U ab ($\rightsquigarrow$ Topologie von U).
Ist $U = B_r(q) \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist ⊛ notwendig und hinreichend.

In $U \subseteq \mathbb{R}^3$ definiert man klassisch die **Rotation** eines Vektorfeldes $g \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ durch

$$\mathrm{rot}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

"$\mathrm{rot}\, g = \nabla \times g$", Bedingung (*) besagt: $\mathrm{rot}(g) = 0$

Das ist klassische Vektoranalysis (→ Physik, Elektrodynamik). In der modernen Analysis benutzt man stattdessen Differentialformen und Kohomologie.

Wir betrachten jetzt lokale Extrema reeller Funktionen.

16. <u>Lemma</u> Sei $r > 0$, sei $\varphi : (-r,r) \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig diff'bar, also $\varphi \in C^2((-r,r), \mathbb{R})$ ($\to$ Analysis I). Dann gilt für alle $t \in (-r,r)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot t + \int_0^t \varphi''(s)(t-s)\,ds$$

Beweis. Das ist korrekt für $t = 0$. Beide Seiten sind stetig diff'bar, Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
\text{LS:}\quad & \varphi'(t) \\
\text{RS:}\quad & \varphi'(0) + \int_0^t \varphi''(s)\,ds + \varphi''(t)\cdot t - \varphi''(t)\cdot t \\
& = \varphi'(0) + \varphi'(t) - \varphi'(0) = \varphi'(t)
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind beide Seiten gleich. $\square$

<u>Korollar</u> Wenn $\varphi'(0) = 0$ gilt und $\varphi''(0) > 0$, so hat φ in 0 ein striktes lokales Minimum [Wenn $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) < 0$, dann striktes lokales Maximum]

<u>Beweis</u> Da φ'' stetig ist und $\varphi''(0) > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass $\varphi''(t) \geq \frac{1}{2}\cdot\varphi''(0)$ für alle $t \in [-\delta, \delta]$. Es folgt

Für $t \in [-\delta, \delta]$, dass

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \underbrace{\varphi'(0)}_{=0} \cdot t + \int_0^t \underbrace{\varphi''(0)}_{\geq \frac{1}{2}\varphi''(0)} (t-s)\, ds$$

$$\geq \varphi(0) + \frac{1}{2} \cdot \varphi''(0) \cdot \int_0^t (t-s)\, ds = \varphi(0) + \frac{1}{4} \cdot \varphi''(0) \cdot t^2$$

für $t \geq 0$ ✓
und $t \leq 0$ ✓

$\square$

<u>Korollar</u> Falls φ in 0 ein lokales Minimum hat, so gilt $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) \geq 0$.

⌜für lokales Maximum: $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) \leq 0$⌟

$\square$

17. <u>Satz</u> Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen, sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Wenn f in $p \in U$ ein lokales Minimum hat, dann gilt $df(p) = 0$ <u>und</u> $Hf(p)(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$

Hesse-Form

<u>Beweis</u> Für $v \in V$ betrachte $\varphi(t) = f(p + t \cdot v)$.

Dann hat φ in 0 ein lokales Minimum, also

$\varphi'(0) = df(p)(v) = 0$ sowie

$\varphi''(0) = D^2 f(p)(v,v) \geq 0$ $\square$

18. <u>Beispiel</u> $U = V = \mathbb{R}^2$, $f(p) = p_1^2 - p_2^2$.

$p = (p_1, p_2)$, $df(p) = 2p_1 \, dx_1 - 2p_2 \, dx_2$

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

also $Hf(p)(v,v) = 2 \cdot v_1^2 - 2 \cdot v_2^2$ $\qquad v = (v_1, v_2)$

Der einzige <u>kritische Punkt</u> (d.h. Punkt, wo $df(p) = 0$) ist $p = (0,0)$. Dort hat f <u>kein</u> lokales Extremum, denn $Hf(p)(v,v) = \begin{cases} 2 & v = e_1 \\ -2 & v = e_2 \end{cases}$

19. <u>Theorem</u> (<u>Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema</u>)

Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen, sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, sei $p \in U$ kritischer Punkt von f (d.h. $df(p) = 0$).

Falls es $\delta > 0$ gibt so, dass für alle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ gilt

$$Hf(p)(v,v) \geq \delta$$

so hat f in p ein striktes lokales Minimum.

⌜ Entsprechend gilt: falls $Hf(p)(v,v) \le -\delta$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$, so hat f in p ein striktes lokales Maximum. ⌟

<u>Beweis</u> Setze $A(u) = D^2f(u) - D^2f(p)$. Da $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ ist $A : U \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(V,\mathbb{R})) = \mathcal{L}(V,V^*)$ stetig, mit $A(p) = 0$. Es gibt also $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U$ so, dass $\|A(u)\| \le \frac{\delta}{2}$ für alle $u \in B_\varepsilon(p)$. Ist $\|v\| = 1$, so folgt $|A(u)(v,v)| \le \|A(u)\| \cdot \|v\|^2$

$$\le \frac{\delta}{2}.$$

Also: $D^2f(u)(v,v) = D^2f(p)(v,v) + A(u)(v,v)$

$$\rightsquigarrow \; |D^2f(u)(v,v)| \ge \underbrace{|D^2f(p)(v,v)|}_{\ge \delta} - \underbrace{|A(u)(v,v)|}_{\le \frac{\delta}{2}} \ge \frac{\delta}{2}$$

Setze $\varphi(t) = f(p+tv) \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon$

$\rightsquigarrow \; \varphi'(t) = df(p+tv)(v), \quad \varphi''(0) = D^2f(p)(v,v)$

$\rightsquigarrow \; \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \int_0^t \varphi''(s)(t-s)\,ds$

§11.16

$$\ge \varphi(0) + \frac{1}{4} D^2f(p)(v,v) \cdot t^2 \quad \text{für } |t| < \varepsilon$$

d.h. $f(p) < f(u)$ für alle $u \in B_\varepsilon(p)$, $u \neq p$. $\square$

<u>Korollar</u> Ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$, $f \in C(U,\mathbb{R})$ mit $df(p) = 0$ und

$v \neq 0$

$Hf(p)(v,v) > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$, so hat f in p ein striktes lokales Minimum.

<u>Beweis</u> Sei $S = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid \|v\| = 1 \}$. Dann ist $S \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, vgl § 9.19. Da die Abbildung $v \mapsto Hf(p)(v,v)$ stetig ist, hat sie ein Minimum auf S, vgl § 9.20. Also gibt es $\delta > 0$ so, dass $Hf(p)(v,v) \geq \delta$ für <u>alle</u> $v \in S$. □

⌜Eine entsprechende Aussage gilt für strikte lokale Maxima, wenn $Hf(p)(v,v) < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$ ⌟

20. <u>Bemerkung</u> Sei V ein reeller Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform

$$b : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt <u>positiv definit</u> (bzw. <u>positiv semidefinit</u>), falls $b(v,v) > 0$ für alle

$v \in V$, $v \neq 0$ gilt (bzw $b(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$). Sie heißt <u>negativ definit</u> (bzw <u>negativ semidefinit</u>) falls $b(v,v) < 0$ für alle $v \in V, v \neq 0$ (bzw $b(v,v) \leq 0$ für alle $v \in V$).

Das Korollar sagt also: ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und ist $p \in U$ mit $df(p) = 0$ und $Hf(p)$ positiv definit, so hat f in p ein striktes lokales Minimum.

Für $m = 1$ ist das aus der <u>Schule</u> bekannt:
$f'(p) = 0$, $f''(p) > 0$ $\Rightarrow$ lokales striktes Minimum in p.

Ein entsprechender Satz gilt für strikte lokale Maxima: $df(p) = 0$ und $Hf(p)$ negativ definit $\Rightarrow$ striktes lokales Maximum in p.

Ein Punkt $p \in U$ mit $df(p) = 0$ nennt man auch einen <u>kritischen Punkt</u> von f.