§ 12. Taylorentwicklung und der Satz vom lokalen Inversen

1. **Lemma** Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Sei $p \in U$ und $v \in V$ so, dass $p + tv \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(p+v) = f(p) + \int_0^1 df(p+tv)(v)\,dt$$

Beweis Setze $\varphi(t) = f(p+tv) \Rightarrow \varphi$ stetig diffbar (auf $(-\delta, 1+\delta)$ für $\delta > 0$ hinreichend klein) mit

$\varphi'(t) = df(p+tv)(v)$, also

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt \qquad \square$$

2. **Satz** Sei V normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen, sei $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ mit $k \geq 2$. Dann gilt für alle $p \in U$, $v_1, \dots, v_k \in V$ und alle Permutationen $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$

(Permutation = bijektive Abbildung $\sigma : \{1,..,k\} \to \{1,..,k\}$)

$$D^k f(p)(v_1,\dots,v_k) = D^k f(p)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).$$

<u>Beweis</u> Induktion nach k. Für $k = 0,1$ wird nichts behauptet, für $k=2$ ist das der Satz von Schwarz § 11.1].

Induktionsannahme: das ist wahr für $k \geq 2$, zeige: ist auch wahr für $k+1$.

<u>1. Fall</u> $\sigma(k+1) = \sigma(k+1)$. Dann gilt

$$D^k f(p)(v_1,..,v_k) = D^k f(p)(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)}) \quad (IA)$$

$$\Rightarrow D D^k f(p)(v_1,..,v_k,v_{k+1}) = D D^k f(p)(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)},v_{\sigma(k+1)}) \quad (V)$$

<u>2. Fall</u> $\sigma(k+1) = l < k+1$. Sei τ_1 die Permutation, die genau l und k vertauscht, sei τ_2 die Permutation, die genau k und $k+1$ vertauscht.

Betrachte $\rho = \tau_2 \circ \tau_1 \circ \sigma$, $\rho(k+1) = k+1$.

Nach 1. Fall verändern τ_1 und ρ den Wert nicht.

Nach Schwarz verändert τ_2 den Wert nicht,

$$D^2 D^{k-1} f(p)(v_1,..,v_{k-1},v_k,v_{k+1}) = D^2 D^{k-1} f(p)(v_1,\dots,v_{k-1},v_{k+1},v_k)$$

Also ändert auch $\sigma = \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1} \circ \rho = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \rho$ den Wert nicht. $\#\square$

3. Theorem (Taylors Formel)

Sei V ein normierter Vektorraum, sei $U \subseteq V$ offen, sei $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R})$ für $k \geq 0$.

Sei $p \in U$ und $v \in V$ so, dass $p + tv \in U$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Dann gilt

$$f(p+v) = f(p) + Df(p)(v) + \frac{1}{2} D^2 f(p)(v,v) +$$

$$\frac{1}{6} D^3 f(p)(v,v,v) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(p)(v,\dots,v) + R_{k+1}(p)(v)$$

(Taylorentwicklung zum Grad k) mit Restglied

$$R_{k+1}(p)(v) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(p+tv)(v,\dots,v)\, dt$$

Beweis mit Induktion nach k.

$k=0$: $\quad f(p+v) = f(p) + \int_0^1 Df(p+tv)(v)\, dt \qquad (\text{v})$

$k=1$: $\quad$ Setze $g(t) = Df(p+tv)(v)$

$h(t) = -(1-t) = (t-1)$

$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$, also

$$\left[g(t)\,h(t)\right]\Big|_{t=0}^{1} = \int_0^1 g'(t)h(t)\,dt + \int_0^1 g(t)h'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow DF(p)(v) = \int_0^1 D^2F(p+tv)(v,v)(t-1)\,dt + \underbrace{\int_0^1 DF(p+tv)(v)\,dt}$$

$$\Rightarrow f(p+v) = f(p) + DF(p)(v) + \int_0^1 D^2f(p+tv)(v,v)\cdot(1-t)\,dt \quad (\checkmark)$$

Allgemein:

$$g(t) = D^{k+1}f(p+tv)(v,\dots,v)$$

$$h(t) = -\frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad h'(t) = \frac{(1-t)^k}{k!}$$

$$\underbrace{\int_0^1 g(t)h'(t)\,dt}_{=R_{k+1}(p)(v)} = -\int_0^1 g'(t)h(t)\,dt + \left[g(t)h(t)\right]_{t=0}^{1}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!} D^{k+2} f(p+tv)(v,\dots,v)\,dt$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(p)(v,\dots,v)$$

$$= R_{k+2}(p)(v) + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(p)(v,\dots,v)$$

$\square$

1. **Bemerkung** Wenn $V = \mathbb{R}$ ist und $U \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, so lautet die Formel für $p \in U$, $v \in \mathbb{R}$

$$f(p+v) = f(p) + f'(p)v + \frac{1}{2} f''(p) v^2 + \frac{1}{6} f'''(p) v^3 + \dots$$
$$+ \frac{1}{k!} \underbrace{f^{(k)}(p)}_{k\text{-te Ableitung}} v^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(p+tv)\, v^{k+1}\, dt$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) v^k$ heißt Taylor-Reihe (falls $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$). Die Taylor-Reihe konvergiert nicht unbedingt gegen f ! Wichtiger ist Taylors Formel mit Restglied.

2. <u>Bemerkung</u> Für das Restglied R_{k+1} gibt es andere Formeln, zum Beispiel

$$R_{k+1}(p)(v) = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(p)(v,\dots,v) + \lambda(v)\|v\|^{k+1}$$

wobei $\lambda(0)=0$, λ stetig in $v=0$.

<u>Denn</u>: Setze $\varphi(w) = D^{k+1} f(p+w) - D^{k+1} f(p)$

$\Rightarrow$ $\varphi(0)=0$, φ stetig auf $B_\varepsilon(0)$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U$, $\|\varphi(v)\|$ <u>beschränkt</u> auf $B_\varepsilon(0)$

$$R_{k+1}(p)(v) = \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(p)(v,\dots,v)\,dt}_{=A} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \varphi(tv)(v,\dots,v)\,dt}_{=B}$$

$$A = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} f(p)(v,\dots,v)$$

$$|B| \leq \frac{1}{k!} \sup\left\{ \|\varphi(tv)\| \|v\|^{k+1} \;\middle|\; t\in[0,1],\ v \in B_\varepsilon(0) \right\}$$

$$\leq \frac{1}{k!} \sup\left\{ \|\varphi(v)\| \;\middle|\; v \in B_\varepsilon(0)\right\} \cdot \|v\|^{k+1} \qquad \square$$

4. Satz (Die Neumannsche Reihe)

~~(John von Neumann 1903–1957)~~

(Carl Gottfried Neumann, 1832–1925)

Sei V ein Banachraum, sei $F: V \to V$ linear und stetig mit $\|F\| = r < 1$. Dann konvergiert die Reihe $g = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$ $(F^0 = id_V)$,

g ist linear und stetig mit

$$g(id_V - F) = (id_V - F)g = id_V$$

d.h. $g = (id_V - F)^{-1}$.

Beweis: Es gilt $\left\| \sum_{k=0}^{m} F^{k+n} \right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \|F^{k+n}\|$

$$\leq \sum_{k=0}^{m} \|F\|^{k+n} \leq \sum_{k=0}^{m} r^{k+n} \leq \frac{r^m}{1-r}$$

(geometrische Reihe), also ist $\left(\sum_{k=0}^{n} F^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$

eine Cauchy-Folge im Banachraum $\mathcal{L}(V,V)$.
vgl §9.10

Sei $g = \sum_{k=0}^{\infty} F^k$ ihr Grenzwert.

Dann ist $g \in \mathcal{L}(V,V)$, also linear + stetig.

Weiter gilt

$$(\mathrm{id}_V - f)\sum_{k=0}^{m} f^k = \mathrm{id}_V - f^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} f^k\,(\mathrm{id}_V - f)$$

sowie $\lim_m \|f^m\| = \lim_m r^m = 0$ (weil $r < 1$) (Ana I, § 3.4)

also $\lim_m f^{m+1} = 0$ $\square$

5. <u>Satz</u>: Sei V ein Banachraum, sei

$$GL(V) = \{ f : V \to V \mid f \text{ ist linear und stetig mit stetigem Inversen} \}$$

Dann ist $GL(V) \subseteq \mathcal{L}(V,V)$ offen, $GL(V)$ ist eine Gruppe und die Abbildungen

$$GL(V) \times GL(V) \to GL(V)$$
$$(g, h) \mapsto g \circ h$$

$$GL(V) \to GL(V)$$
$$h \mapsto h^{-1} \quad \text{(Inverse)}$$

sind stetig.

Man nennt $GL(V)$ die <u>generelle lineare Gruppe</u>.

Für $V = \mathbb{R}^n$ schreibt man auch $GL(\mathbb{R}^n) = GL_n(\mathbb{R})$.

Beweis Nach Definition gilt für $g, h \in GL(V)$, dass $g^{-1}, h^{-1} \in GL(V)$, also auch

$(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \in GL(V)$, damit folgt:

$g \circ h \in GL(V)$ und $g^{-1}, h^{-1} \in GL(V)$,

d.h. wir haben eine Gruppe. #

(a) GL(V) $\subseteq \mathcal{L}(V,V)$ ist offen

Ist $g \in GL(V)$ beliebig und $\varepsilon = \frac{1}{\|g^{-1}\|}$, so gilt für $f \in B_\varepsilon(g)$, dass

$$f = g - (g-f) = g(\underbrace{id_V - g^{-1}(g-f)}_{=h})$$

$\|h\| \leq \|g^{-1}\| \cdot \|g-f\| < 1$, also nach § 12.4

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^k = (id_V - h)^{-1} \in GL(V) \Rightarrow id_V - h \in GL(V)$$

$$\Rightarrow f \in GL(V).$$

(b) Stetigkeit der Multiplikation: Sei $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in GL(V)$ mit $\|f-\tilde{f}\| \leq \varepsilon$, $\|g-\tilde{g}\| \leq \varepsilon$.

Dann gilt $\|gf - \tilde{g}\tilde{f}\| = \|g(f-\tilde{f}) + (g-\tilde{g})\tilde{f}\|$

$\leq \|g\| \cdot \|f-\tilde{f}\| + \|g-\tilde{g}\| \cdot \|\tilde{f}\| \leq \varepsilon\|g\| + \varepsilon(\|f\| + \varepsilon)$

$= \varepsilon(\|g\| + \|f\| + \varepsilon)$

(c) Stetigkeit der Inversion. Sei $g \in GL(V)$, sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\|g^{-1}\|}$. Für $f \in GL(V)$ mit $\|f-g\| \leq \varepsilon$ setze $h = g^{-1}(g-f) = id_V - g^{-1}f$, es folgt $\|h\| \leq \frac{1}{2}$, $f = g(id_V - h)$ (vgl. (a)), $f^{-1} = (id_V - h)^{-1} g^{-1}$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Neumann'sche}\\ \text{Reihe}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} h^k g^{-1}, \quad \text{also} \quad f^{-1} - g^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} h^k g^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h^k h g^{-1}$$

$$\Rightarrow \|f^{-1} - g^{-1}\| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \|h\|^k}_{\leq 2 \text{ geometrische Reihe}} \|h\| \cdot \|g^{-1}\| \leq 2 \cdot \|h\| \cdot \|g^{-1}\|$$

$\leq 2 \cdot \|g - f\| \cdot \|g^{-1}\|^2 \leq 2\|g^{-1}\|^2 \varepsilon$. Also ist die Inversionsabbildung $f \mapsto f^{-1}$ stetig an der Stelle $g \in GL(V)$ $\Rightarrow$ Inversion ist stetig.

$\square$

Wir betrachten jetzt Integrale von Kurven.
Im Folgenden ist $(V, \|.\|)$ ein Banachraum und $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abg. Intervall.

6. Def Eine Abbildung $c: [a,b] \to V$ heißt beschränkt, wenn $\{\|c(t)\| \mid t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.
Diese beschränkten Abbildungen bilden einen Vektorraum

$$B([a,b], V) = \{ c: [a,b] \to V \mid c \text{ beschränkt} \}$$

mit Norm $\|c\|_\infty = \sup \{ \|c(t)\| \mid t \in [a,b] \}$.

Wenn $c: [a,b] \to V$ stetig ist, ist c auch beschränkt (weil $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, vgl § 9.18 und § 9.19), also gilt

$$C([a,b], V) \subseteq B([a,b], V).$$

7. Satz $(B([a,b], V), \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum und $C([a,b], V) \subseteq B([a,b], V)$ ist abgeschlossen, also auch ein Banachraum (§ 8.13)
(Beides sind Vektorräume ✓)

Beweis Für jedes $t \in [a,b]$ gilt $\|c(t)\| \leq \|c\|_\infty$.

Sei $(c_j)_{j \in J}$ eine Cauchyfolge in $B([a,b], V)$.

Für $k, l \in J$ ist $\|c_k(t) - c_l(t)\| \leq \|c_k - c_l\|_\infty$,

also ist $(c_j(t))_{j \in J}$ eine Cauchyfolge in V, für jedes $t \in [a,b]$. Setze $c(t) = \lim_{j \to \infty} c_j(t)$.

Ist $\varepsilon > 0$ so gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\| c_l - c_k \|_\infty \leq \varepsilon$, für alle $k, l \geq m$. Es folgt $\| c_l(t) - c_k(t) \| \leq \varepsilon$ und damit auch $\| c - c_k \|_\infty \leq \varepsilon$ für $k \geq m$. Insbesondere gilt $c \in B([a,b], V)$ und $\lim_{j \to \infty} \| c - c_j \|_\infty = 0$.

Also ist $(B[a,b], V), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum.

Falls alle c_j stetig sind, so ist auch c stetig.

Denn: sei $\varepsilon > 0$, wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\| c_m - c_l \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $l \geq m$. Zu $t \in [a,b]$ wähle $\delta > 0$ so, dass $\| c_l(t) - c_l(s) \| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $|s - t| \leq \delta$ ($l \geq m$ fest gewählt). Es folgt

$$\| c(s) - c(t) \| \leq \| c(s) - c_l(s) \| + \| c_l(s) - c_l(t) \| + \| c_l(t) - c(t) \| \leq \varepsilon$$

für $|s - t| \leq \delta$. Also ist c stetig in t. $\square$

8. **Def** Sei $Z = \{ a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b \}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ (vgl § 5.6 Analysis I)

Wir nennen $c : [a,b] \to V$ Stufenfunktion, wenn c auf jedem Teilintervall (a_k, a_{k+1}) konstant ist, $c(t) = c_k$ für alle $a_k < t < a_{k+1}$

Die Stufenfunktionen bilden einen Vektorraum $\mathrm{Step}([a,b],V) \subseteq \mathcal{B}([a,b],V)$. Für solch eine Stufenfunktion c definieren wir das <u>Integral</u>

$$\int_a^b c(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot (a_{k+1} - a_k)$$

Ist $Z' \supseteq Z$ eine feinere Zerlegung, ändert das nichts am Wert des Integrals. Wie in Analysis I, §5 zeigt man: für $c_1, c_2 \in \mathrm{Step}([a,b],V)$, $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (c_1(t)+c_2(t))\,dt = \int_a^b c_1(t)\,dt + \int_a^b c_2(t)\,dt$$

$$\int_a^b s\cdot c(t)\,dt = s \cdot \int_a^b c(t)\,dt .$$

Weiter gilt

$$\left\| \int_a^b c(t)\,dt \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{m} c_k (a_{k+1} - a_k) \right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \|c_k\| (a_{k+1} - a_k)$$

$\leq \|c\|_\infty (b-a)$, also ist die Abbildung

$$\int : \mathrm{Step}([a,b],V) \longrightarrow V$$
$$c \longmapsto \int_a^b c(t)\,dt$$

linear und $(b-a)$-Lipschitz stetig.

Der Abschluss von $Step([a,b],V) \subseteq B([a,b],V)$ ist der Raum der <u>Regelfunktionen</u> $R([a,b],V)$

9. <u>Satz</u> Es gilt $C([a,b],V) \subseteq R([a,b],V)$, jedes stetige $c:[a,b] \to V$ ist Grenzwert von Stufenfunktionen.

<u>Beweis</u> Setze $Z_n = \{a + k\frac{b-a}{n} \mid k = 0,1,..,n\}$ $n = 1,2,3,\ldots$ Sei c_n die Stufenfunktion mit

$$c_n(t) = c(a + k\tfrac{b-a}{n})$$ für

$$a + k\frac{b-a}{n} \le t < a + (k+1)\frac{b-a}{n}.$$

<u>Beh</u> $\lim\limits_{n \geq 1} \| c - c_n \|_\infty = 0.$

<u>Denn</u>: Wäre das falsch, so gäbe es $r > 0$ und $J \subseteq \{1,2,3,..\}$ unendlich mit

$$\| c - c_j \|_\infty \geq r \quad \text{für alle } j \in J.$$

also $t_j \in [a,b]$ mit $\| c(t_j) - c_j(t_j) \| \geq \frac{r}{2}$

Da $[a,b]$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(t_k)_{k\in K}$ mit $t = \lim\limits_{k\in K} t_k$ ($K \subseteq J$ unendlich)

Also $\lim\limits_{k\in K} c(t_k) = c(t)$ sowie $\|c(t_k) - c_k(t_k)\| \geq \frac{r}{2}$

Zu t_k wähle z_k mit $z_k \leq t_k \leq z_k + \frac{1}{k}(b-a)$

Es folgt $c(z_k) = c_k(t_k)$ und $\lim\limits_{k} z_k = t$

also $\lim\limits_{k} \|c(t_k) - c_k(t_k)\| = \lim\limits_{k} \|c(t_k) - c(z_k)\| = 0$

↯

Also doch $\lim\limits_{n\geq 1} \|c - c_n\|_\infty = 0$

$\square$

10. <u>Def</u> Sei $c \in R([a,b], V)$ eine Regelfunktion.

Wir definieren $\int\limits_a^b c(t)dt = \lim\limits_{j\in J} \int\limits_a^b c_j(t)\,dt$,

wobei $(c_j)_{j\in J}$ eine Folge von Stufenfunktionen ist mit

$\lim\limits_{j\in J} \|c - c_j\|_\infty = 0$. Das Ergebnis hängt <u>nicht</u>

von der gewählten Folge von Stufenfunktionen ab, denn:

Wenn $\tilde{c}, \tilde{\tilde{c}} \in Step([a,b], V)$ mit $\|c - \tilde{c}\|_\infty \leq \varepsilon$ und

$\|c - \tilde{\tilde{c}}\|_\infty \leq \varepsilon$, so ist $\|\tilde{c} - \tilde{\tilde{c}}\|_\infty \leq 2\cdot\varepsilon$, also

$$\left\| \int\limits_a^b \tilde{c}(t)dt - \int\limits_a^b \tilde{\tilde{c}}(t)dt \right\| \leq 2\cdot\varepsilon(b-a) .$$

Weiter folgt $\left\| \int_a^b c(t)\,dt \right\| \le \|c\|_\infty (b-a)$

wie in Analysis

11. <u>Satz</u> Ist $c : [a,b] \to V$ stetig, $t_0 \in [a,b]$, so ist auch $C(t) = \int_{t_0}^{t} c(s)\,ds$ stetig diff'bar, auf (a,b); mit $\dot{C} = c$.

<u>Beweis</u> $C(t+h) = C(t) + \int_t^{t+h} c(s)\,ds$

$= C(t) + h \cdot c(t) + \int_t^{t+h} (c(s) - c(t))\,ds$

und $\left\| \int_t^{t+h} (c(s) - c(t))\,ds \right\| \le |h| \cdot \underbrace{\sup\{\|c(s) - c(t)\| \mid |s-t| < h\}}_{\text{stetig in } h=0 \text{ und dort } =0}$, $\square$

12. <u>Korollar</u> (<u>Mittelwertsatz</u>) Seien V, W Banachräume, $U \subseteq V$ offen, $f \in C^1(U, W)$. Sei $v \in V$, $p \in U$ so, dass $p + tv \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt $f(p+v) = f(p) + \int_0^1 Df(p+tv)(v)\,dt$

Insbesondere ist $\| f(p+v) - f(p) \| \leq \sup \{ \| Df(p+tv)(v) \| \mid t \in [0,1] \}$
$\leq \sup \{ \| Df(p+tv) \| \mid t \in [0,1] \} \cdot \| v \|$

Beweis: Betrachte $c(t) = f(p+tv)$ mit Ableitung

$$\dot{c}(t) = Df(p+tv)(v)$$

$$c(1) - c(0) = \int_0^1 Df(p+tv)(v)\,dt \qquad \square$$

13. Korollar: Ist $c : [a,b] \to V$ eine stetig diff'bare Kurve, V ein Banachraum, so gilt

$$L(c) \geq \| c(b) - c(a) \|.$$

Beweis: Nach Umparametrisierung können wir annehmen, dass $a = 0$ und $b = 1$, vgl § 10.13. Nun gilt

$$c(1) - c(0) = \int_0^1 \dot{c}(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\| c(1) - c(0) \| \leq \int_0^1 \| \dot{c}(t) \|\,dt = L(c). \qquad \square$$

14. Satz (spezieller Satz von lokalen Inversen)

Sei V ein Banachraum, sei $r>0$ und sei $f: B_r(0) \to V$ stetig diff'bar mit $f(0)=0$ und $Df(0) = id_V$ ($\hat{=}$ Ableitung in 0 ist Eins)

Dann gibt es $r'>0$ und $g: B_{r'/2}(0) \to V$ stetig diff'bar mit $f(g(p)) = p$ für alle $p \in B_{\frac{r'}{2}}(0)$, d.h. f hat eine Inverse nahe 0.

Beweis in 5 Schritten. Schreibe $\overline{B}_s(p) = \{v \in V \mid \|v-p\| \leq s\}$.

(1) Wähle $\delta > 0$ so, dass $\|Df(v) - Df(0)\| < 1$ für alle $v \in \overline{B}_\delta(0)$. Wegen $Df(0) = id_V$ folgt dann $Df(v) \in GL(V)$ ($\to$ Neumannsche Reihe)

(2) Setze $h(v) = v - f(v)$. Dann ist $Dh(0) = 0$, also gibt es $r'>0$ so, dass $\|Dh(v)\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $v \in \overline{B}_{r'}(0)$. OE ist $r' \leq \delta$.

Aus dem MWS § 12.12 folgt

$$\|h(v)\| = \|h(v) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|v\| \leq \frac{r'}{2}$$

für alle $v \in \overline{B}_{r'}(0)$.

(3) Beh Zu jedem $w \in \overline{B}_{\frac{r'}{2}}(0)$ gibt es genau ein $v \in \overline{B}_{r'}(0)$ mit $f(v) = w$.

Denn: Sei $w \in \overline{B}_{\frac{r'}{2}}(0)$, setze $q(u) = w + h(u)$, für $u \in \overline{B}_{r'}(0)$. 1 Es folgt

$\|q(u)\| \leq \|w\| + \|h(u)\| \leq \frac{r'}{2} + \frac{r'}{2} = r'$, d.h.

$q : \overline{B}_{r'}(0) \to \overline{B}_{r'}(0)$. Weiter gilt

$$\|q(u_1) - q(u_2)\| = \|h(u_1) - h(u_2)\| \overset{\text{MWS}}{\leq} \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|$$

Nach Banachs Fixpunktsatz § 9.21 gibt es genau ein $v \in \overline{B}_{r'}(0)$ mit $q(v) = v$, d.h. mit $v = w + h(v) = w + v - f(v)$, d.h. $w = f(v)$. $\square$

Wir definieren $g : \overline{B}_{\frac{r'}{2}}(0) \to \overline{B}_{r'}(0)$ durch $g(w) = v$, wobei v die eindeutige Lsg. von $f(v) = w$ ist.

(4) Beh g ist 2-Lipschitzstetig auf $\overline{B}_{\frac{r'}{2}}(0)$

Denn: $\|\underbrace{g(w_1)}_{=v_1} - \underbrace{g(w_2)}_{=v_2}\| = \|w_1 - w_2 + h(v_1) - h(v_2)\|$

$$\overset{\text{MWS}}{\leq} \|w_1 - w_2\| + \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|$$

$$= \|w_1 - w_2\| + \frac{1}{2}\|g(w_1) - g(w_2)\|$$

also $\frac{1}{2}\|g(w_1) - g(w_2)\| \leq \|w_1 - w_2\|$ $\square$

(5) <u>Beh</u> g ist stetig diff'bar auf $B_{\frac{r'}{2}}(0)$

<u>Denn</u>: Sei $p \in B_{\frac{r'}{2}}(0)$, $v \in V$ ... kleine Schritte

$g(p) = u \qquad g(p+v) = \tilde{u} \qquad T = Df(u)^{-1}$

$f(u) = p \qquad f(\tilde{u}) = p+v$

Dann ist $v = f(\tilde{u}) - f(u) = Df(u)(\tilde{u}-u) + \lambda(\tilde{u}-u)\|\tilde{u}-u\|$

$\lambda(0) = 0$, λ stetig in 0.

$$g(p+v) - g(p) - T(v)$$
$$= \tilde{u} - u - T(f(\tilde{u}) - f(u)) = \underbrace{\tilde{u} - u - (\tilde{u}-u)}_{=0} + T(\lambda(\tilde{u}-u))\|\tilde{u}-u\|$$

also $\|g(p+v) - g(p) - T(v)\|$
$$\leq \|T\| \cdot \|\lambda(\tilde{u}-u)\| \cdot \|\tilde{u}-u\|$$
$$= \|T\| \cdot \|\lambda(g(p+v)-g(p))\| \cdot \|g(p+v) - g(p)\|$$
$$\leq \|T\| \cdot \|\lambda(g(p+v)-g(p))\| \cdot 2\|v\|$$

Folglich ist g diff'bar in p mit $Dg(p) = T$ 2

Damit ist $Dg(p) = Df(p)^{-1}$ aber stetige Abbildung, vgl § 12.5.

$\square$

(1) $g(v) = v \iff w + h(v) = v$

$\iff w + v - f(v) = v$

$\iff w = f(v)$

---

(2) Denn: $g(p+v) = g(p) + T(v) + \mu(v)\|v\|$

und wir haben gezeigt: μ ist stetig in $v=0$.

15. <u>Theorem</u> (Satz vom lokalen Inversen)

Sei V, W Banachräume, sei $U \subseteq V$ offen, $f \in C^1(U, W)$, $p \in U$. Falls die Ableitung

$Df(p): V \to W$ bijektiv ist, mit stetiger Inversen $T: W \to V$, so gibt es $\tilde{U} \subseteq W$ offen mit $q = f(p) \in \tilde{U}$ und $g \in C^1(\tilde{U}, V)$ sowie $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$ so, dass gilt

$f(g(w)) = w$ für alle $w \in B_\varepsilon(q) \subseteq \tilde{U}$

$g(f(v)) = v$ für alle $v \in B_{\tilde{\varepsilon}}(p) \subseteq U$

<u>Beweis</u> Sei $T = Df(p)^{-1}$,

$\alpha(v) = v - p \qquad \alpha^{-1}(v) = v + p$

$\beta(w) = w - q \qquad \beta^{-1}(w) = w + q$

Betrachte $F_1 = T \circ \beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \to V$

$F_1(0) = 0$, $DF_1(0) = id_V$. Also gibt es nach § 12.14 $g_1 : B_{r'/2}(0) \to V$ mit $F_1 \circ g_1(w) = w$ für alle $w \in B_{r'/2}(0)$.

$\leadsto f \circ \underbrace{\alpha^{-1} \circ g_1 \circ T \circ \beta}_{=g}(w) = w$ für $w \in B_\varepsilon(q)$,

wobei $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, dass $T(B_\varepsilon(0)) \subseteq B_{\frac{r'}{2}}(0)$

Also $f(g(w)) = w$.

Nun gilt $Dg(q)^{-1} = Df(p)$, daher hat auch g ein lokales Inverses $\tilde{f}$, es gibt $\tilde{\varepsilon} > 0$ so, dass $g \circ \tilde{f}(v) = v$ für $v \in D_{\tilde{\varepsilon}}(p)$. Also

$$f(v) = \underbrace{f \circ g}_{} \circ \underbrace{\tilde{f}(v)}_{= w} = w = \tilde{f}(v) \qquad \square$$

16. Theorem (Satz über implizite Funktionen)

Seien X, Y, Z Banachräume, sei $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$. Dann ist auch $X \times Y$ ein Banachraum (z.B. mit Norm $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$) und $U \times V \subseteq X \times Y$ ist offen. Sei $f \in C^1(U, Z)$ mit $Df(x_0, y_0)(x, y) = S(x) + T(y)$

$$S \in \mathcal{L}(X, Z)$$
$$T \in \mathcal{L}(Y, Z)$$

Falls T bijektiv mit stetiger Inverser ist, so gibt es $W \subseteq U$ offen und $g \in C^1(W, Y)$ mit

$$g(x_0) = y_0$$
$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0) = z_0 = \text{const}$$

Nahe x_0 ist g eindeutig bestimmt.

Man sagt, g ist implizit gegeben durch

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$$

<u>Beweis</u> mit dem Satz vom lokalen Inversen.

Betrachte $\hat{F}(x,y) = (x, f(x,y))$, $\hat{F}: U \times V \to X \times Z$

mit $D\hat{F}(x_0,y_0)(x,y) = (x, Df(x_0,y_0)(x,y))$

$= (x, S(x) + T(y)) = (x,z)$

$z = S(x) + T(y) \iff T^{-1}(z) = T^{-1} \circ S(x) + y$

$\iff y = T^{-1}(z) - T^{-1} \circ S(x)$. Nach § 12.15 hat $\hat{F}$ nahe (x_0,y_0) ein Inverses $\hat{g}$, also $\hat{g}(x,z) = (x, g_2(x,z))$

$(x,z) = \hat{F} \circ \hat{g}(x,z) = \hat{F}(x, g_2(x,z)) = (x, f(x, g_2(x,z)))$.

Setze $g(x) = g_2(x, z_0)$ $\qquad z_0 = f(x_0,y_0)$

$\leadsto$ g stetig diff'bar, $g_2(x_0,z_0) = y_0 \leadsto g(x_0) = y_0$

$f(x,g(x)) = f(x, g_2(x,z_0)) = z_0$.

Ist $\tilde{g}$ weitere Funktion mit $\tilde{g}(x_0) = y_0$, $f(x,\tilde{g}(x)) = z_0$

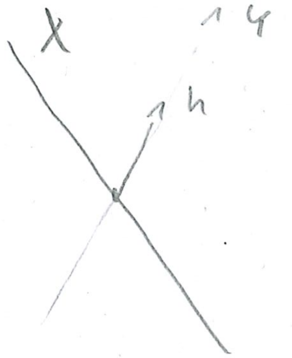
so folgt $\hat{F}(x, \tilde{g}(x)) = (x, z_0) \leadsto \hat{g}(x, z_0) = (x, g_2(x,z_0)) = (x, \tilde{g}(x))$

also $g = \tilde{g}$. $\square$

17. <u>Interessanter Spezialfall</u> V Banachraum, $U \subseteq V$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $p \in U$ mit $df(p) \neq 0$. Wähle Vektor $h \in V$ mit $df(p)(h) \neq 0$, setze $X = \ker(df(p)) = \{x \in V \mid df(p)(x) = 0\}$

$Y = \mathbb{R} \cdot h$ skalare Vielfache von h

$\leadsto V = X \oplus Y$, jeder Vektor $v \in V$ hat eindeutige Zerlegung $v = x + sh$ $x \in X$, $s \in \mathbb{R}$

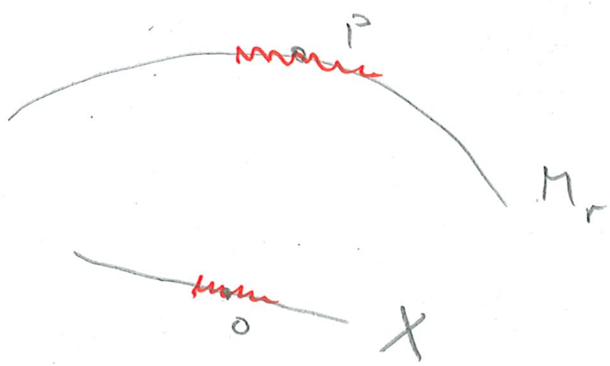


$$df(p)(x + sh) = s \cdot \underbrace{df(p)(h)}_{\neq 0}$$

$\leadsto$ Bedingungen für Satz über implizite Funktionen sind erfüllt.

Sei $r = f(p)$ und $M_r = \{u \in U \mid f(u) = r\} \subseteq U$ "Niveaufläche von f". Nahe p erhalten wir Parametrisierung von M_r durch $x \longmapsto x + p + g(x)h$

$x \in B_\varepsilon(0) \cap X$



Ableitung von

$r = f(x + p + g(x)h)$ ergibt

$$0 = \underbrace{df(p)(x)}_{= 0} + \underbrace{df(p)(h)}_{\neq 0} dg(0)(x)$$

$$\Rightarrow dg(0)(x) = 0$$

Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ weitere glatte Funktion.
Falls φ auf M_r in p ein lokales Extrem hat, so gilt $d\varphi(p) = \lambda \cdot df(p)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denn Betrachte $x \longmapsto \varphi(x + p + g(x) \cdot h)$

$$B_\varepsilon(0) \cap X \to \mathbb{R}$$

Ableiten ergibt $0 = d\varphi(p)(x) + d\varphi(h) \underbrace{dg(0)(x)}_{=0}$

also $d\varphi(p)(x) = 0$ für alle $x \in X$

$\Rightarrow \quad d\varphi(p) = \lambda \cdot dF(p)$

Man nennt λ einen Lagrange-Multiplikator.

Bsp $U = V = \mathbb{R}^n$, A symmetrische $n \times n$-Matrix

Beh: A hat einen reellen Eigenwert.

Denn $f(v) = \langle v | v \rangle = \|v\|_2^2$

$M_1 = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1 \}$ kompakt

$\varphi(v) = \langle v | Av \rangle = v^T A v$

$df(p)(x) = 2\langle p | x \rangle \rightsquigarrow df(p) \neq 0$ für alle $p \neq 0$

$d\varphi(p)(x) = 2\langle p | Ax \rangle = 2\langle Ap | x \rangle$

φ hat Extrema auf M_1, etwa in $p \in M_1$

$\lambda \cdot df(p) = d\varphi(p) \Rightarrow \lambda p = Ap$ $\square$