§3 Cauchyfolgen und Reihen

<u>Beobachtung.</u> Angenommen, die reelle Folge $(c_j)_{j\in I}$ konvergiert gegen t. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i \geq n$ gilt $|c_i - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt für $j,k \geq n$, dass

$$|c_i - c_j| \leq |c_i - t + t - c_j| \leq |c_i - t| + |c_j - t| \leq \varepsilon$$

1. <u>Def</u> Eine reelle Folge $(c_i)_{i\in I}$ heißt <u>Cauchyfolge</u> oder <u>Fundamentalfolge</u>, wenn folgendes gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $j,k \geq n$ gilt

$$|c_j - c_k| \leq \varepsilon$$

Die Überlegung oben zeigt: jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Was ist mit der Umkehrung?

9. Theorem (Das Cauchy-Kriterium)

Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. #

Beweis Wir haben schon überlegt: jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. (✓)

Angenommen, $(c_i)_{i\in I}$ ist eine Cauchy-Folge. Wir beweisen die Konvergenz in zwei Schritten.

1. Beh Die Folge $(c_i)_{i\in I}$ ist beschränkt, hat also nach Bolzano-Weierstraß §2.21 einen Häufungspunkt t.

Denn Es gibt $n \in I$ so, dass $|c_j - c_k| \le 1$ für alle $j,k \ge n$. Es folgt $|c_j - c_n| \le 1$ für $j \ge n$, also $|c_j| \le |c_n| + 1$ für $j \ge n$.

Für $j \le n$ gilt $|c_j| \le \max\{|c_i| \mid i \le n\} = r$,

also $|c_i| \le \max\{r, |c_n|+1\}$ für alle $i \in I$.

2. Behauptung Es gilt $\lim_{i \in I} c_i = t$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|c_j - c_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $j,k \geq n$ gilt.

Da t ein Häufungspunkt ist, gibt es $m \geq n$ mit $|c_m - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt für $i \geq n$, dass

$$|c_i - t| \leq |c_i - c_m| + |c_m - t| \leq \varepsilon \qquad \square$$

Die Tatsache, dass in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Bemerkung Eine reelle Folge $(c_i)_{i \in I}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in I$ existiert, so dass

$|c_i - c_n| \leq \varepsilon$ für alle $i \geq n$ gilt.

Denn dann gilt für $i,j \geq n$, dass

$$|c_i - c_j| \leq |c_i - c_n| + |c_n - c_j| \leq 2 \cdot \varepsilon .$$

3. <u>Definition</u> Sei $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit Indexmenge $I = \mathbb{N}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} c_j = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_k$$

Die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt <u>Partialsummen-Folge</u> und s_k heißt <u>Partialsumme</u>.

Für die Partialsummenfolge schreibt man symbolisch auch $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ und nennt das eine <u>unendliche Reihe</u>.

Falls gilt $\lim_{k \in \mathbb{N}} s_k = t$, dann schreibt man auch

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j = t$$

für den Grenzwert.

Das Symbol $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ hat also <u>mehrere Bedeutungen</u>, es bezeichnet die Partialsummen-folge <u>und</u> eventuell den Grenzwert. (!)

4. **Lemma** Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.

Dann gilt $\lim_{n \in \mathbb{N}} q^n = 0$.

Beweis Für $q = 0$ und $n \geq 1$ ist $q^n = 0 \Rightarrow$ fertig.

Für $q \neq 0$ ist $\frac{1}{|q|} > 1$, schreibe $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ mit $x > 0$.

Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt $\frac{1}{|q|^n} \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $|q|^n \leq \frac{1}{1+n \cdot x}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} \leq 1 + nx$ (weil $\mathbb{R}$ archimedisch ist).

Für $k \geq n$ folgt $|q|^k \leq \frac{1}{1+k \cdot x} \leq \frac{1}{1+n \cdot x} \leq \varepsilon$ $\square$

5. **Satz** (Die geometrische Reihe)

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Beweis Es gilt $s_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1-q}$, vgl. § 2.1.

Da $\lim_{m \in \mathbb{N}} q^{m+1} = 0$ nach § 3.4 folgt mit § 2.18, dass $\lim_{m \in \mathbb{N}} s_m = \frac{1}{1-q}$

$\square$

6. Satz (Das Cauchy-Kriterium für Reihen)

Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $l \geq n$ gilt

$$\left| \sum_{k=n}^{l} a_k \right| \leq \varepsilon .$$

Beweis Wir betrachten die Partialsummen $s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$. Nach § 3.2 konvergiert die Reihe genau dann, wenn $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Angenommen, $\left| \sum_{k=n}^{l} a_k \right| \leq \varepsilon$ für alle $l \geq n$.

Es folgt für $i, j \geq n$, dass

$$|s_i - s_j| = \left| \sum_{k=0}^{i} a_k - \sum_{k=0}^{j} a_k \right|$$
$$= \left| \sum_{k=n}^{i} a_k - \sum_{k=n}^{j} a_k \right| \leq 2 \cdot \varepsilon$$

Wenn das Kriterium gilt, dann ist $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ folglich eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$|s_i - s_j| \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq m$, so folgt

für $l \geq m+1$ mit $\sum_{k=m+1}^{l} a_k = s_l - s_m$, dass

$\left| \sum_{k=n}^{l} a_k \right| \leq \varepsilon$ für $n = m+1$ und $l \geq k$. $\square$

<u>Folgerung</u> Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert,

so folgt $\lim_{k \in \mathbb{N}} a_k = 0$

(Denn $s_k - s_{k-1} = a_k$)

7. <u>Beispiel</u> <u>Die harmonische Reihe</u>

Die <u>harmonische Reihe</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$

ist divergent, obwohl $\lim_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} = 0$ gilt.

<u>Denn</u> $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$

$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \dots$

$\Rightarrow$ die Folge der Partialsummen ist unbeschränkt.

Wir sammeln jetzt einige Konvergenzkriterien.

8. Satz (Das Leibnizkriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge, die gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$.

Beweis Sei $s_m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$. Dann gilt

$$s_{2l+1} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{>0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{>0} + \dots + \underbrace{(a_{2l} - a_{2l+1})}_{>0}$$

$$s_{2l} = a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} - \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} - \dots - \underbrace{(a_{2l-1} - a_{2l})}_{>0}$$

Es folgt: $s_{2l+1} > 0$ streng monoton wachsend in l

$s_{2l} \le a_0$ streng monoton fallend in l

$$0 < s_{2l+1} < s_{2l} \le a_0$$

Es gilt $\lim\limits_{l\in\mathbb{N}} s_{2l+1} - \lim\limits_{l\in\mathbb{N}} s_{2l} = \lim\limits_{l\in\mathbb{N}} a_l = 0$

also $\lim\limits_{l\in\mathbb{N}} s_{2l+1} = t = \lim\limits_{l\in\mathbb{N}} s_{2l}$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also m so, dass für $l \geq m$

$$|s_{2l+1} - t| \leq \varepsilon \text{ und } |s_{2l} - t| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\in\mathbb{N}} s_k = t$ $\square$

#

__Beispiel__ Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{konvergiert also!}$$

Was ist der Grenzwert?

9. __Def__ Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ __konvergiert absolut__, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

__Satz__ Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

__Beweis__ mit dem Cauchy-Kriterium §3.6.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \geq 0$ so, dass

$$\left| \sum_{k=n}^{\ell} |a_k| \right| = \sum_{k=n}^{\ell} |a_k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } \ell \geq n \text{ gilt.}$$

Dann ist auch

$$\left| \sum_{k=n}^{\ell} a_k \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} \sum_{k=n}^{\ell} |a_k| \leq \varepsilon$$

$\square$

10. Def Eine Eigenschaft gilt für fast alle Element einer Menge, wenn es höchstens endlich viele Ausnahmen gibt.

Beispiel

- "fast alle Zahlen sind größer als 2^{100}" ist wahr
- "Fast alle natürlich Zahlen sind gerade" ist falsch.

- Sind $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und gilt $a_k = b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert.

Die Grenzwert können aber unterschiedlich sein!

Beweis $\boxed{\text{ÜA}}$

11. Satz (Das Majoranten kriterium)

Angenommen, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert absolut, und $|a_k| \leq |b_k|$ gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Man nennt dann $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_k| \leq |b_k|$ für alle $k \geq n$ gilt und so, dass $\sum_{k=n}^{l} |b_k| \leq \varepsilon$ für alle $l \geq n$. Dann

Folgt $\sum_{k=n}^{l} |a_k| \leq \varepsilon$ für alle $l \geq n$. $\square$

12. Satz (Das Quotientenkriterium)

Wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt mit $0 \leq q < 1$, so dass für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k|$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Bew. Für $q = 0$ ist das klar, OE $q \neq 0$.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k|$ für alle $k \geq m$. Es folgt $|a_k| \leq q^{k-m} |a_m|$ für alle $k \geq m$, also ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^{-m} q^k a_m$ eine Majorante. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (q^{-m} a_m) q^k = q^{-m} a_m \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ konvergiert}$$

absolut nach § 3.5., nach dem Majorantenkriterium also auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ □

13. Satz (Das **Wurzelkriterium**)

Wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ gibt mit $0 \leq q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Bew.: Es folgt $|a_n| \leq q^n$ für fast alle n, also ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ eine Majorante. $\square$

14. Beispiele (a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ konvergiert absolut.

Bew.: Die Folge der Partialsummen $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$ ist monoton wachsend, weiter gilt

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(2^m)^2}\left(2^{m+1} - 2^m\right)$$

$$= \frac{1}{2^m}(2-1) = \frac{1}{2^m}$$

Es folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2$ ← geometrische Reihe

also konvergiert die Reihe (absolut) nach § 2.16. $\square$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert absolut.

<u>Beweis</u> $\frac{k!}{k^k} = \frac{\boxed{1\cdot 2}\cdot 3 \cdots \cancel{k}}{\boxed{k\cdot k}\cdot k \cdots \cancel{k}} \le \frac{2}{k^2}$ für $k \ge 2$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ eine <u>Majorante</u>. Jetzt benutze Bsp (a).

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ ist divergent.

<u>Beweis</u> $(2k)^2 = 4k^2 \ge k(k+1)$ für $k \ge 1$

(mit Induktion nach k ...)

also $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} > \frac{1}{2k}$

Wenn die Reihe konvergent wäre, dann wäre sie eine Majorante der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$, die aber nach § 3.7 nicht konvergent ist.

15. **Satz** (Die Exponentialreihe) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann konvergiert die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$ absolut. #

Beweis Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $2|x| \leq m$ gilt.

Es folgt $\frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.

Jetzt können wir das Quotientenkriterium mit $q = \frac{1}{2}$ anwenden, denn

$$\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right| = \frac{|x|^k \cdot |x|}{k! \cdot k+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{x^k}{k!} \right|$$

für $k \geq m$. Also konvergiert die Reihe absolut. $\square$

Wir definieren die Exponentialfunktion durch

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Beachte: $\exp(0) = \frac{0^0}{0!} = 1$.

16. <u>Def</u> Es seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen (die nicht unbedingt konvergent sind)

Wir definieren die <u>Summe</u> $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$

mit $c_k = a_k + b_k$. Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} t a_k$$

Damit wird die Menge aller unendlichen Reihen ein Vektorraum. Aus §2.18 folgt direkt: Wenn beide Reihen (absolut) konvergieren, dann konvergiert auch ihre Summe (absolut).

Wie könnte man Reihen multiplizieren?

<u>Beobachtung</u>:

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right) = \sum_{k=0}^{2m} p_k \quad \text{mit}$$

$$p_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j} \quad \text{mit } a_j = b_j = 0 \text{ für } j > m$$

Wir definieren das Cauchy-Produkt von zwei unendlichen Reihen durch

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$$

$$p_k = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j}$$

Man rechnet leicht nach: Mit dem Cauchy-Produkt wird die Menge aller unendlichen Reihen ein Ring (ÜA: Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz, was ist das 0-Element bzw. das Einselement?)

Was ist mit Konvergenz beim Cauchy-Produkt?

17. Theorem (Cauchys Produktsatz)

Wenn die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ auch absolut. Für die Grenzwerte

$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $v = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gilt dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = u \cdot v.$$

<u>Beweis</u> Wir setzen $d_m = \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right)$.

Nach § 2.18 gilt $\lim_{m \in \mathbb{N}} d_m = u \cdot v$.

<u>Behauptung</u> $\lim_{m \in \mathbb{N}} \left(d_m - \sum_{k=0}^{m} p_k\right) = 0$

Wenn wir das gezeigt haben, folgt $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = u \cdot v$.

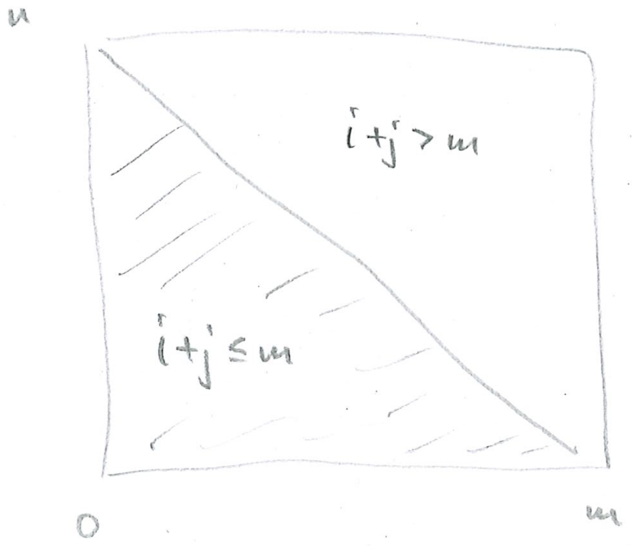
<u>Beweis der Behauptung</u>. Es gilt jedenfalls

$$\sum_{k=0}^{m} p_k = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{i+j \leq m} a_i \cdot b_j$$

(addiert werden alle $a_i b_j$ mit $i+j \leq m$)

sowie $d_m = \sum_{i,j \leq m} a_i \cdot b_j$

(addiert werden alle $a_i \cdot b_j$ mit $i,j \leq m$.



Es folgt $\quad d_m = \sum_{k=0}^{m} p_k = \sum_{\substack{i,j\le m \\ i+j>m}} a_i \cdot b_j$

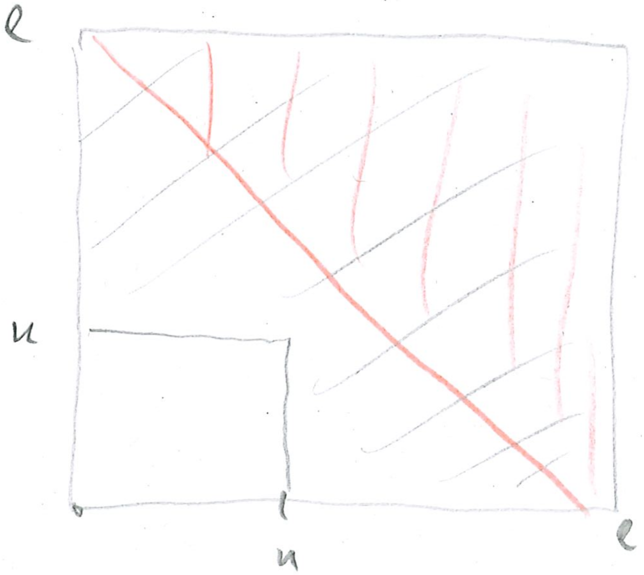
Betrachte jetzt $\quad h_\ell = \sum_{i,j\le \ell} |a_i|\cdot|b_j| = \left(\sum_{i=0}^{\ell} |a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\ell} |b_j|\right)$

Die Folge $(h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergiert wegen der absoluten Konvergenz der Reihen nach §2.18. Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es also $n\in\mathbb{N}$ so, dass $|h_\ell - h_n| \le \varepsilon$ für alle $\ell \ge n$. Für $\ell \ge 2n$ folgt

$$\varepsilon \ge |h_\ell - h_n| = h_\ell - h_n$$

$$= \sum_{i,j\le l} |a_i|\cdot|b_j| - \sum_{i,j\le n} |a_i|\cdot|b_j|$$

$$\ge \sum_{\substack{i,j\le l\\ i+j>l}} |a_i|\cdot|b_j| \ge \left| d_l - \sum_{k=0}^{l} p_k \right|$$



Also ist $\lim_{l\in\mathbb{N}} \left(d_l - \sum_{k=0}^{l} p_k\right) = 0$ und

die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Warum haben wir absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$?

Setze $\tilde a_k = |a_k|$, $\tilde b_k = |b_k|$,

$$\tilde p_k = \sum_{j=0}^{k} \tilde a_j \tilde b_{k-j} \Rightarrow |p_k| \le \tilde p_k$$

Der obige Teil und das Majorantenkriterium, angewandt auf $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k$, zeigen die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} |p_k|$. $\square$

18. __Satz__ (__Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion__)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

__Beweis__ Wir wenden den Produktsatz an.

$$a_k = \frac{1}{k!} x^k, \quad b_k = \frac{1}{k!} y^k$$

$$p_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j \frac{1}{(k-j)!} y^{k-j}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{binomische Formel}}}{=} \frac{1}{k!} (x+y)^k$$

$\square$

<u>Folgerungen</u> (a) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

und $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

<u>Denn</u> $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$,

damit $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Für $x \geq 0$ ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \geq 0$ (klar)

Damit ist aber auch $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \geq 0$ $\square$

#

<u>Fazit.</u> Die Exponentialfunktion ist ein <u>Gruppenhomomorphismus</u> von der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ in die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Das Schaubild der Exponentialfunktion