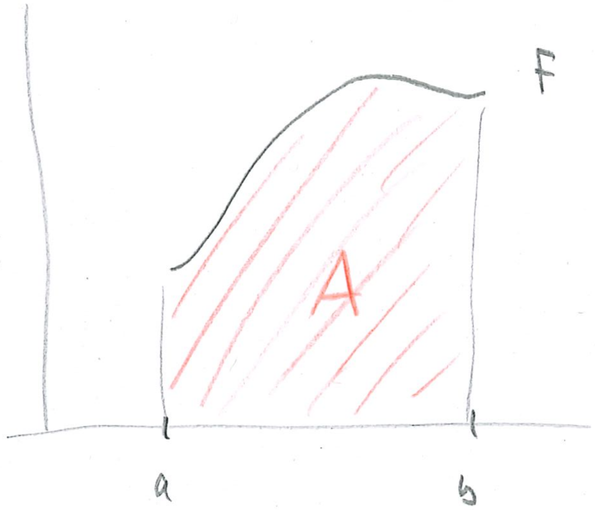
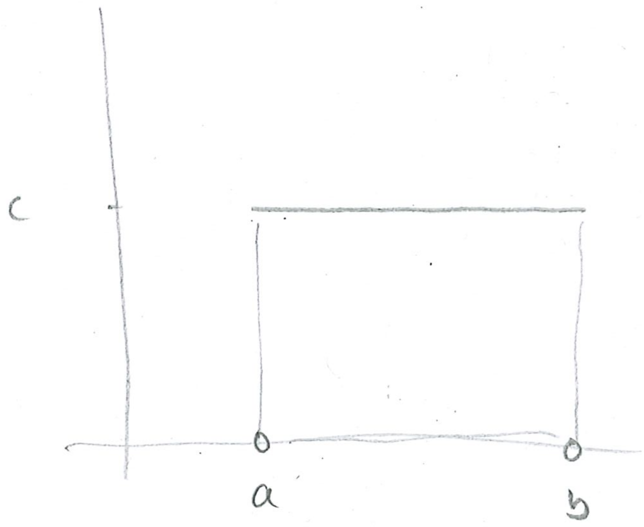
§5 Integration

Idee der Integration: wir wollen Flächeninhalte unter Funktionen bestimmen



$A = ?$

Falls f konstant ist, ist das einfach:

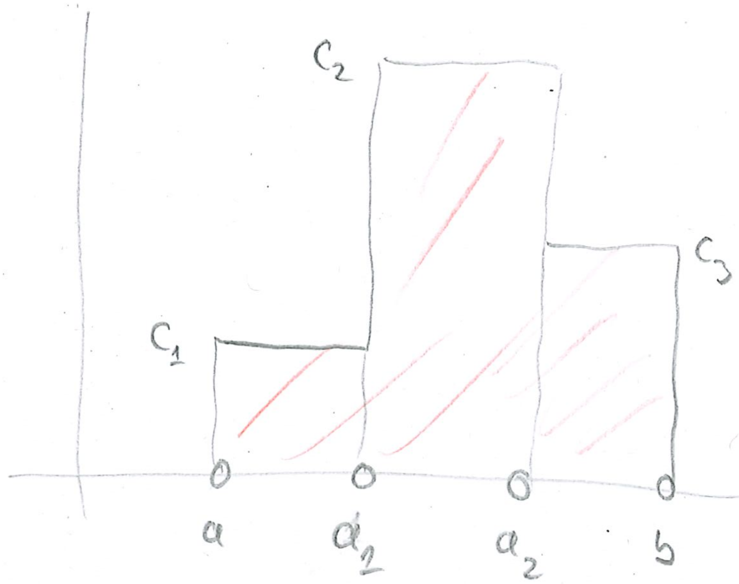


$f(x) = c$

$A = (b-a) \cdot c$

(für $c < 0$ ist also der Flächeninhalt negativ)

Für <u>Stufenfunktionen</u> addiert man Flächeninhalt auf



$$A = (a_1 - a)c_1 + (a_2 - a_1)\cdot c_2 + (b - a_2)\cdot c_3$$

Komplizierte Funktionen versuchen wir durch Stufenfunktionen zu approximieren.

1. <u>Def</u> Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in A$.

Sei $B(A, \mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Abbildungen $f: A \to \mathbb{R}$.

Dann ist $B(A, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum und ein Ring.

Beweis Seien $f, g \in B(A, \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$

mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in A$.
$|g(x)| \leq L$

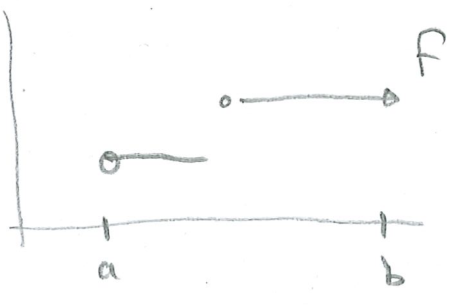
Es folgt $|f(x) + g(x)| \leq K + L$

$|r \cdot f(x)| \leq |r| \cdot K$

$|f(x) \cdot g(x)| \leq K \cdot L$ $\square$

2. **Folgerung** Ist $A = [a,b]$ ein abg. Intervall, so ist $C([a,b], \mathbb{R}) \subseteq B([a,b], \mathbb{R})$ nach dem Satz von Weierstraß § 4.12, weil für jedes $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ die Bildmenge $f([a,b]) = [u,v]$ ein Intervall ist, und $[u,v] \subseteq [-K, K]$ für $K = \max\{|u|, |v|\}$.

Beachte: beschränkte Funktionen müssen nicht stetig sein:



beschränkt, nicht stetig.

3. **Def** Ist $f \in B(A, \mathbb{R})$, so ist die <u>Supremumsnorm</u> von f definiert als

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)| \mid x \in A \}$$

<u>Satz</u> (<u>Eigenschaften der Supremumsnorm</u>)

Sei $f, g \in B(A, \mathbb{R})$, sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f = 0$
Nullfunktion

(ii) $\|r \cdot f\|_\infty = |r| \cdot \|f\|_\infty$

(iii) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

(iv) $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

<u>Beweis</u> Es gilt $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty$, damit folgt (i).

$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$,

damit folgt (iii)

$|r \cdot f(x)| = |r| \cdot |f(x)| \leq |r| \cdot \|f\|_\infty$.

Ist $r \neq 0$, so ist $\|f\|_\infty = \|\frac{1}{r} \cdot r \cdot f\|_\infty \leq \frac{1}{|r|} \|rf\|_\infty$

also $|r| \cdot \|f\|_\infty \leq \|rf\|_\infty$ und (ii) folgt.

$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

und damit gilt (iv). $\square$

4. <u>Lemma</u> Sei $(f_k)_{k \in I}$ eine Folge in $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, sei $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent (= gleich bedeutend)

(i) $(f_k)_{k \in I}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

(ii) $\lim\limits_{k \in I} \|f - f_k\|_\infty = 0$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Falls gilt $\lim\limits_{k \in I} \|f - f_k\|_\infty = 0$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $k \geq n$, damit $|f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in A$, $k \geq n$, damit konvergiert die Folge gleichmäßig.

Die Schritte lassen sich alle umkehren. $\square$

#

5. Def Eine Folge $(f_k)_{k\in I}$ in $\mathbb{B}(A,\mathbb{R})$ heißt Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n\in\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k,l\geq n$ gilt $\|f_k-f_l\|_\infty\leq\varepsilon$. (vgl § 3.1)

Falls $(f_k)_{k\in I}$ gleichmäßig gegen $f\in\mathbb{B}(A,\mathbb{R})$ konvergiert, so ist $(f_k)_{k\in I}$ eine Cauchy-Folge. Die Umkehrung ist auch richtig.

Satz Eine Folge $(f_k)_{k\in I}$ in $\mathbb{B}(A,\mathbb{R})$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn es $f\in\mathbb{B}(A,\mathbb{R})$ gibt so, dass $\lim_{k\in I}\|f-f_k\|_\infty=0$.

Beweis Angenommen, $\lim_{k\in I}\|f-f_k\|_\infty=0$. Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es dann $n\in\mathbb{N}$ so, dass $\|f-f_k\|_\infty\leq\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k\geq n$. Es folgt $\|f_k-f_l\|_\infty\leq\|f-f_k\|_\infty+\|f-f_l\|_\infty\leq\varepsilon$ für alle $k,l\geq n$.
Sei jetzt $(f_k)_{k\in I}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{B}(A,\mathbb{R})$.

Für jedes $x \in A$ gilt dann $|f_k(x) - f_\ell(x)| \leq \|f_k - f_\ell\|_\infty$, folglich ist $(f_k(x))_{k \in I}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Wir definieren $f(x) = \lim_{k \in I} f_k(x)$ (mit § 3.2)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k, \ell \geq n$ $\|f_k - f_\ell\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Für $k, \ell \geq n$ und $x \in A$ gilt

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f_\ell(x)| + |f_\ell(x) - f_k(x)|$$
$$\leq \underbrace{|f(x) - f_\ell(x)|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{für } \ell \text{ hinreichend} \\ \text{groß}}} + \underbrace{\|f_\ell - f_k\|_\infty}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

also $\|f - f_k\|_\infty \leq \varepsilon$.

Weiter gilt $|f(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leq \varepsilon + \|f_k\|_\infty$

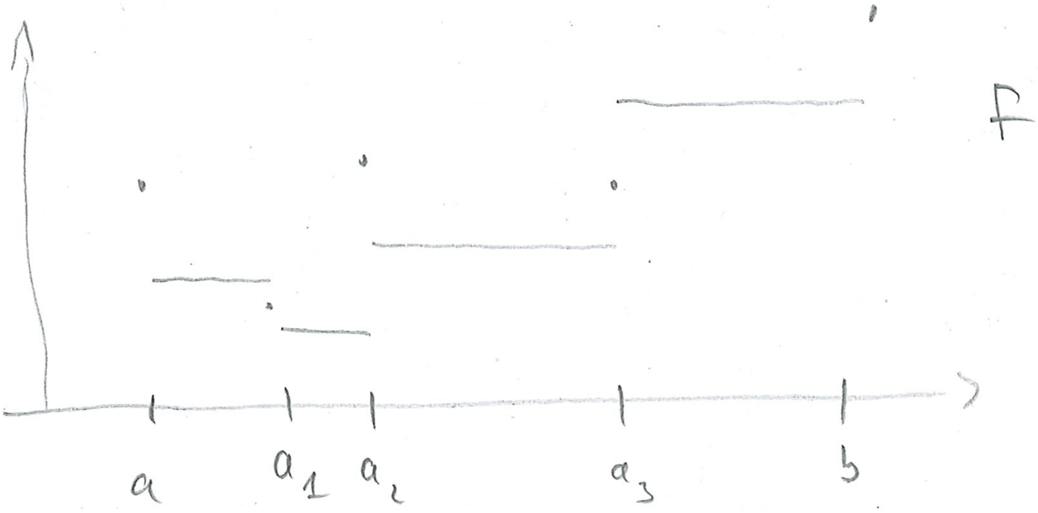
also ist $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ $\square$

Man sagt auch, $(\mathcal{B}(A, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein <u>Banach-Raum</u> (ein vollständiger normierter Vektorraum → Analysis II)

6. <u>Def</u> Eine <u>Zerlegung des abgeschl. Intervalls $[a,b]$</u> ist eine endliche Folge von Zahlen

$Z = \{a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b\}$, für ein $m \in \mathbb{N}$.

Eine Zerlegung Z' von $[a,b]$ ist <u>feiner</u> als Z, falls gilt $Z \subseteq Z'$. Wenn Z_1, Z_2 beides Zerlegungen von $[a,b]$ sind, so auch $Z_1 \cup Z_2$ und $Z_1 \cap Z_2$. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stufenfunktion</u>, wenn es eine Zerlegung Z von $[a,b]$ gibt, $Z = \{a = a_0 < \ldots < a_m = b\}$ sowie Zahlen $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $k = 1, \ldots, m$ und $a_{k-1} < x < a_k$ gilt $f(x) = y_k$.



<u>Klar</u> Wenn f eine Stufenfunktion bezüglich Z ist und wenn Z' feiner als Z (also $Z \subseteq Z'$), so ist f auch Stufenfunktion bezüglich Z'.

7. <u>Lemma</u> Sei f, g Stufenfunktion auf $[a,b]$ bezüglich Zerlegung Z_1, Z_2. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und $r \cdot f$ (für $r \in \mathbb{R}$) Stufenfunktion bezüglich $Z_1 \cup Z_2$.

<u>Beweis</u> Klar nach Definition. $\square$

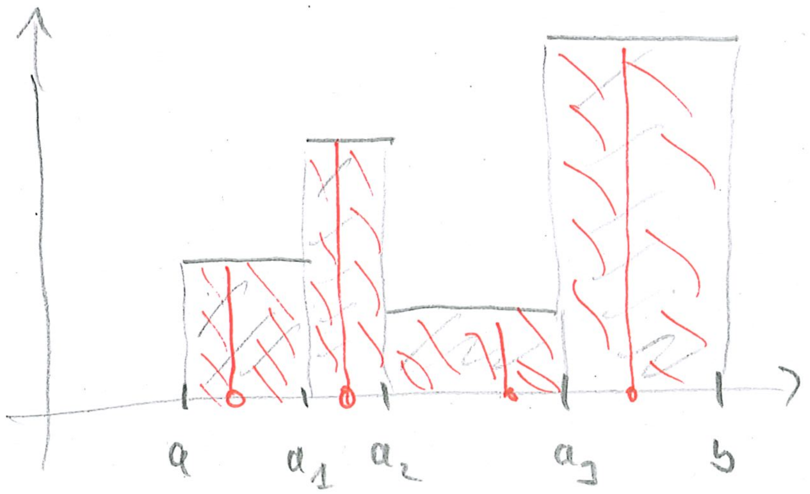
<u>Folgerung</u> Die Menge $\mathrm{Step}([a,b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R})$ aller Stufenfunktionen auf $[a,b]$ ist ein Vektorraum und ein Ring.

8. <u>Def</u> Sei $f \in \mathrm{Step}([a,b], \mathbb{R})$ Stufenfunktion bezüglich $Z = \{a = a_0 < \ldots < a_m = b\}$,

$f(x) = y_k$ für $a_{k-1} < x < a_k$ $\quad k = 1, \ldots, m.$

Wir definieren das <u>Integral</u> von f durch

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} y_k \cdot (a_k - a_{k-1})$$



Klar: ist $Z' \supseteq Z$ eine Verfeinerung, so erhalten wir den gleichen Wert für das Integral, also hängt das Integral nicht von Z ab.

Beobachtung

(1) Für $f, g \in \mathrm{Step}([a,b], \mathbb{R})$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

sowie

$$\int_a^b r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) Also ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Step}([a,b], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung oder eine

<u>Linearform</u> oder ein <u>lineares Funktional</u>

(3) Im allgemeinen gilt $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ ∇ o

9. <u>Lemma</u> Ist $f, g \in \mathrm{Stp}([a,b], \mathbb{R})$ mit $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$, so gilt

$$\left| \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \leq (b-a)\cdot \varepsilon$$

<u>Beweis</u> Sei $h = f-g \Rightarrow h$ Stufenfunktion bzgl einer Zerlegung $Z = \{a_0 = a < \ldots < a_m = b\}$ und

$$\left| \sum_{k=1}^m y_k (a_k - a_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^m |y_k| (a_k - a_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^m \varepsilon (a_k - a_{k-1}) = \varepsilon(b-a)$$

$\square$

10. **Def** Eine Funktion $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ heißt **Regelfunktion**, wenn es eine Folge von Stufenfunktion $(f_k)_{k\in I}$ gibt, die gleichmässig gegen f konvergiert, $\lim_{k\in I} \|f - f_k\|_\infty = 0$. Sei $R([a,b],\mathbb{R})$ die Menge aller Regelfunktionen, also

$$Step([a,b],\mathbb{R}) \subseteq R([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}).$$

Satz Es gilt folgendes.

(i) $R([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum und Teilring.

(ii) Ist $(f_k)_{k\in I}$ eine Folge von Regelfunktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so gilt $f \in R([a,b],\mathbb{R})$.

Kurz: " $R([a,b],\mathbb{R})$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. "

Bew. Sie $f, g \in R([a,b],\mathbb{R})$, sei $r \in \mathbb{R}$.

Sind $\tilde{f}, \tilde{g} \in Step([a,b],\mathbb{R})$ mit

$\|\tilde{f} - f\|_\infty \le \varepsilon$ und $\|\tilde{g} - g\|_\infty \le \varepsilon$, so folgt

$$\| f+g - \underbrace{(\tilde{f}+\tilde{g})}_{\text{Stufenfkt.}} \|_\infty \leq \| f-\tilde{f} \|_\infty + \| g-\tilde{g}\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

also ist $f+g \in R([a,b],\mathbb{R})$. Weiter gilt

$$\| r\cdot f - \underbrace{r\cdot \tilde{f}}_{\text{Stufenfkt}} \|_\infty \leq |r| \cdot \| f-\tilde{f}\|_\infty \leq |r|\cdot \varepsilon$$, also ist

auch $r\cdot f \in R([a,b],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \| f\cdot g - \tilde{f}\cdot\tilde{g}\|_\infty &\leq \| f(g-\tilde{g})\|_\infty + \|\tilde{g}(f-\tilde{f})\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \| g-\tilde{g}\|_\infty + \|\tilde{g}\|_\infty \cdot \|f-\tilde{f}\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon + (\|g\|_\infty + \varepsilon)\cdot \varepsilon \end{aligned}$$

also $f\cdot g \in R([a,b],\mathbb{R})$

Damit ist (i) gezeigt, denn solche $\tilde{f}, \tilde{g}$ finden wir für alle $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ usw.

Zu (ii) Wir wählen $\tilde{f}_k \in Stp([a,b],\mathbb{R})$ so, dass

$$\| \tilde{f}_k - f_k \|_\infty \leq \frac{1}{k}$$ gilt, für jedes $k \in I$.

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$\| f_k - f \|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $k \geq n$. Für $k \geq n, \frac{1}{\varepsilon}$

folgt $$\| \tilde{f}_k - f\|_\infty \leq \underbrace{\|\tilde{f}_k - f_k\|_\infty}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\| f_k - f\|_\infty}_{\leq \varepsilon} \leq 2\cdot\varepsilon$$

□

12. Definition Sei $f \in R([a,b], \mathbb{R})$ eine Regelfunktion, sei $(f_k)_{k \in I}$ eine Folge von Stufenfunktionen, die gegen f gleichmäßig konvergiert. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \in I} \int_a^b f_k(x)\,dx \, ,$$

das Riemann-Integral der Regelfunktion f.

Der Grenzwert existiert und hängt nur von f ab, nicht von der Folge $(f_k)_{k \in I}$.

Denn:

$$\left| \int_a^b (f_k(x) - f_l(x))\,dx \right| \le \underbrace{\|f_k - f_l\|_\infty \cdot (b-a)}_{\text{Cauchy-Folge in } \mathbb{R}}$$

also ist $\left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right)_{k \in I}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ nach §3.2.

Sind $\tilde{f}$ und $\tilde{\tilde{f}}$ Stufenfunktionen mit

$\|f - \tilde{f}\|_\infty \le \varepsilon$ und $\|f - \tilde{\tilde{f}}\|_\infty \le \varepsilon$, so ist

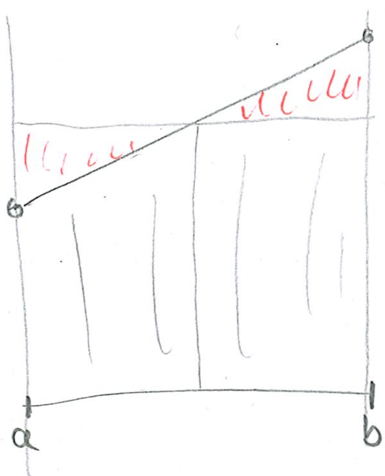
$$\|\tilde{F} - \tilde{\tilde{F}}\|_\infty \le \|f - \tilde{F}\|_\infty + \|f - \tilde{\tilde{f}}\|_\infty \le 2\varepsilon$$

und damit $\left| \int_a^b \tilde{F}(x)\,dx - \int_a^b \tilde{\tilde{F}}(x)\,dx \right| \le 2 \cdot \varepsilon (b-a)$

damit folgt (ii). $\square$

13. Beispiel

(a) $f(x) = mx + t$ Geradengleichung mit Steigung m



$$A = (b-a)\left(m\frac{a+b}{2} + t\right)$$
$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)m + t(b-a)$$

(Mathe Mittelstufe)

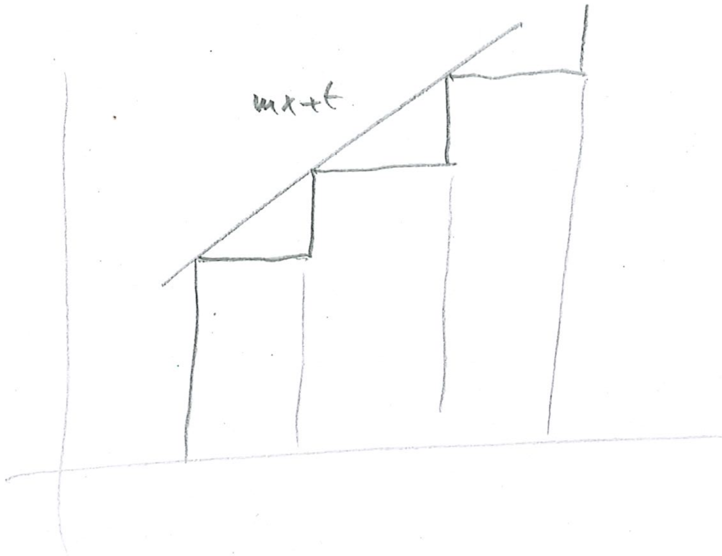
Mathe Oberstufe: "Stammfunktion" $F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + tx$

$$A = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)m + t(b-a) \checkmark$$

Mit § 5.12 Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ betrachte die Zahlen

$$Z_n = \left\{ a = a_0 < a_1 = a + \frac{b-a}{n} < a_2 = a + 2\frac{b-a}{n} < \ldots b = a + n\frac{b-a}{n} \right\}$$

$F_n(x)$ $m \cdot a_{k-1} + t$ für $a_{k-1} \le x < a_k$ $\qquad I = \{1, 2, 3, \dots\}$



$$\|F - F_n\|_\infty \le m \frac{b-a}{n}, \quad \text{also } \lim_{n \in I} \|F - f_n\|_\infty = 0$$

$\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz gegen F.

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k m + t)\frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)m + t\right)\frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{ba - a^2}{n} m + k\frac{(b-a)^2}{n^2} m + t\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= a(b-a)m + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2} m + t(b-a)$$

$$= a(b-a)m + \frac{n-1}{n}\frac{(b-a)^2}{2} m + t(b-a)$$

Im Grenzwert erhalten wir

$$\int_a^b F(x)\,dx = a(b-a)m + \frac{(b-a)^2}{2} m + t(b-a) = \frac{1}{2} m (b^2 - a^2) + t(b-a)$$

Das war erstaunlich mühsam. Wir brauchen also andere Methoden, um Integrale zu berechnen. Das Ganze läßt sich aber in ein Verfahren zur numerischen Integration nutzen.

14. <u>Def</u> Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ abg. Intervall, $I = \{1,2,3,\ldots\}$. Für $n \in I$ sei Z_n wie oben, $Z_n = \left\{ a_0 = a < a_1 = a + \frac{b-a}{n} < a + 2\frac{b-a}{n} < \ldots < a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren F_n durch $F_n(x) = f(a_{k-1})$ für $a_{k-1} \le x < a_k$

<u>Satz</u> Die Folge $(F_n)_{n \in I}$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Insbesondere gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \in I} \int_a^b F_n(x)\,dx$$

Folglich ist $C([a,b],\mathbb{R}) \subseteq R([a,b],\mathbb{R})$, d.h. jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

Beweis Zu zeigen ist $\lim_{n\in I} \|f-f_n\|_\infty = 0$.

Angenommen, das ist falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Teilmenge $K \subseteq I$ mit $\|f-f_k\|_\infty \geq \varepsilon$ für alle $k \in K$. Insbesondere gibt es $x_k \in [a,b]$ mit $|f(x_k) - f_k(x_k)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle $c_k \in Z_k$ mit $c_k \leq x_k < c_k + \frac{b-a}{k}$. Nach Bolzano-Weierstraß gibt es $L \subseteq K$ unendlich so, dass die Folge $(x_\ell)_{\ell\in L}$ konvergiert. Setze $x = \lim_{\ell\in L} x_\ell$; es folgt $x \in [a,b]$ und $\lim_{\ell\in L} c_\ell = x$ (weil $|x_\ell - c_\ell| \leq \frac{b-a}{\ell}$).

Nun ist $f(x) = \lim_{\ell\in L} f(x_\ell) = \lim_{\ell\in L} f(c_\ell) = \lim_{\ell\in L} f_\ell(c_\ell)$

$= \lim_{\ell\in L} f_\ell(x_\ell)$, also $\lim_{\ell\in L} |f(x_\ell) - f_\ell(x_\ell)| = 0$ ↯

$\#\square$

15. Lemma Sei $\varepsilon > 0$, sei $f \in R([a,b],\mathbb{R})$. Dann gibt es $\tilde{f} \in \mathrm{Stp}([a,b],\mathbb{R})$ mit $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \varepsilon$ und $\tilde{f}(x) \geq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

<u>Beweis</u> Es gibt $h \in \mathrm{Step}([a,b],\mathbb{R})$ mit

$\|h-f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (nach Definition). Setze

$\tilde{f}(x) = h(x) + \|h-f\|_\infty$, dann ist

$$\tilde{f}(x) - f(x) = h(x) - f(x) + \underbrace{\|h-f\|_\infty}_{\geq f(x)-h(x)} \geq 0,$$

$\tilde{f} \in \mathrm{Step}([a,b],\mathbb{R})$ und $\underbrace{\|\tilde{f}-f\|_\infty \leq \|f-h\|_\infty + \|f-h\|_\infty}_{\leq \varepsilon}$ $\square$

16. <u>Satz</u> (<u>Eigenschaft des Integrals</u>)

Sei $r \in \mathbb{R}$, sei $f, g \in R([a,b],\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

und

$$\int_a^b r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$R([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto \int_a^b h(x)\,dx$$

linear.

Weiter gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \|f\|_\infty (b-a)$$

Falls für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) \leq g(x)$, so folgt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis Sei $I = \{1,2,3,\dots\}$. Für $n \in I$ wähle $f_n, g_n \in Step([a,b],\mathbb{R})$ mit $\|f-f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, $\|g-g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Es folgt $\|(f+g)-(f_n+g_n)\|_\infty \leq \frac{2}{n}$ sowie $\|r\cdot f - r\cdot f_n\|_\infty \leq |r|\frac{1}{n}$. Mit §2.18 und §5.8 Folgen jetzt die ersten Behauptungen.

Angenommen, es gilt $h(x) \geq 0$ für alle x. Dann gibt es nach §5.15 $h_n \in Step([a,b],\mathbb{R})$ mit $\|h-h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ und $h(x) \leq h_n(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Insbesondere ist dann $h_n(x) \geq 0$, also auch

$$\int_a^b h_n(x)dx \geq 0 \implies \int_a^b h(x)\,dx \geq 0$$

Ist also $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Wegen $\pm f(x) \leq |f(x)|$ folgt $\pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

und $\pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, also $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Wegen $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ folgt schließlich

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,dx = (b-a)\|f\|_\infty \qquad \square$$

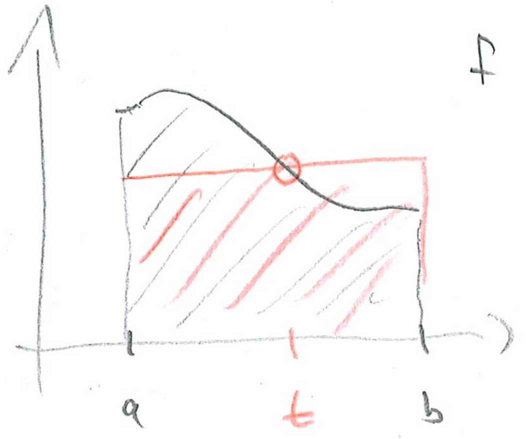
17. __Satz__ (<u>Der Mittelwertsatz der Integralrechnung</u>)

Sei $p \in R([a,b],\mathbb{R})$ und $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ mit $p(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gibt es $t \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(t) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$$

Im Spezialfall $p(x) = 1 = \text{const.}$ erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(t)(b-a) \quad \text{für ein } t \in [a,b]$$



<u>Beweis</u> Nach dem Satz von Weierstraß gilt $f([a,b]) = [u,v]$ für $u,v \in \mathbb{R}$. Es folgt

$u \cdot p(x) \leq f(x) \cdot p(x) \leq v \cdot p(x)$, damit

$u \cdot \int_a^b p(x)dx \leq \int_a^b f(x)p(x)dx \leq v \cdot \int_a^b p(x)dx$. Folglich

gibt es $y \in [u,v]$ mit $y \cdot \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(x)p(x)dx$.

Wähle jetzt $t \in [a,b]$ mit $y = f(t)$. $\square$

18. <u>Fazit</u> Wir haben folgende Vektorräume betrachtet.

$$
\begin{tikzcd}
\text{beschränkte Fkt} & & \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}) \arrow[d, dash] & & \\
\text{Regelfunktion} & & R([a,b],\mathbb{R}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\text{stetige Fkt} & C([a,b],\mathbb{R}) \arrow[dr, dash] & & Stp([a,b],\mathbb{R}) \arrow[dl, dash] & \text{Stufenfkt} \\
& & \{\text{konstante Funktionen}\} \arrow[d, dash] & & \\
& & \{0-\text{Funktion}\} & &
\end{tikzcd}
$$

Integrierbare Funktionen