Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 11

40. Sei (V^n, h) Euklidischer Vektorraum. Betrachten sie die lineare Abbildung

$$b : S^2(\Lambda_2(V^n)) \to S^2(\Lambda_2(V^n)) \ ; \ \ R \mapsto b(R)$$

mit

$$b(R)_{abcd} \quad = \quad R_{abcd} + R_{cabd} + R_{bcad} \, .$$

Zeigen Sie, dass der Kern von b auf dem Bild von b senkrecht steht, und dass das Bild von b isomorph zu $\Lambda_4(V^n)$ ist.

41. Sei (V^n, h) Euklidischer Vektorraum und seien $A, B : V^n \to V^n$ selbstadjungierte lineare Abbildungen. Sei

$$A \wedge B : \Lambda_2(V^n) \to \Lambda_2(V^n) \ ; \ \ v \wedge w \mapsto \frac{1}{2} \cdot (A(v) \wedge B(w) + B(v) \wedge A(w)) \, .$$

Zeigen Sie, dass $A \wedge B$ ein algebraischer Krümmungsoperator ist, d.h. $A \wedge B$ ist ein Element in $S^2(\Lambda_2(V^n))$, welches die erste Bianchi-Identität erfüllt.

42. Sei (V^n, h) Euklidischer Vektorraum und R ein algebraischer Krümmungsoperator. Ferner sei $R^{\#}$ wie in der Vorlesung definiert und $B_{abcd} = -\sum_{e,f=1}^{n} R_{aebf} R_{cedf}$, $h(e,f) = \delta_{ef}$. Zeigen Sie die Identität

$$\langle R^{\#} \cdot a \wedge b, c \wedge d \rangle \quad = \quad -(B_{acbd} - B_{adbc}) \, .$$

Hinweis: Wählen Sie eine Orthonormalbasis $(e_1, ..., e_n)$ von V^n und identifizieren Sie $e_i \wedge e_j$ mit der schiefsymmetrischen $(n \times n)$-Matrix X_{ij}, welche eine Drehung um 90 Grad in der von e_i und e_j aufgespannten Ebene repräsentiert, $i < j$. Geben Sie nun eine allgemeine Formel für die Lieklammer $[X_{ij}, X_{kl}]$ an, $i < j$, $k < l$.

43. Sei (V^n, h) Euklidischer Vektorraum und R ein algebraischer Krümmungsoperator. Zeigen Sie die folgende Identität:

$$R + R \# I \quad = \quad \mathrm{Ric}(R) \wedge \mathrm{id} \, .$$

Hinweis: Berechnen Sie $(\mathrm{Ric}(R) \wedge \mathrm{id})_{abcd}$ und $(R \# I)_{abcd}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 27.6.2007, 12:15.