Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 2

4. Zeigen Sie, dass eine freie Gruppenaktion $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{Diffeo}(\mathbb{R}^2)$ von $G = \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ existiert, so dass

   (a) für alle $x \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung U_x von x existiert mit $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$ für alle $g \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

   (b) Die "Quotienten-Mannigfaltigkeit" $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ nicht Hausdorffsch ist.

5. Sei (M, g) eine vollständige n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die universelle Überlagerung $\pi : \hat{M} \to M$, versehen mit der zurückgeholten Metrik $\hat{g} = \pi^* g$, eine vollständige n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

6. Sei $(\hat{M}, \hat{g})$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jede lokale Isometrie $\pi : (\hat{M}, \hat{g}) \to (M, g)$ eine Überlagerungsabbildung ist.
   (Hinweis: Für jedes $p \in M$ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die Exponentialabbildung $\exp_p : B_\epsilon(0_p) \to B_\epsilon(p)$ ein Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie nun die Zusammenhangskomponenten von $\hat{U} = \pi^{-1}(B_\epsilon(p))$.)

7. Es sei (M^2, g) eine Riemannsche Fläche, $p \in M^2$ und $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ eine Orthonormalbasis von (T_pM^2, g_p). Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p : B_\epsilon(0_p) \to B_\epsilon(p)$ Diffeomorphismus ist. Betrachten Sie die Immersion

   $$F : (0, \epsilon) \times \mathbb{R} \to M^2 \;;\;\; (r, \varphi) \mapsto \exp_p \left(r \cdot (\cos(\varphi) \cdot \hat{e}_1 + \sin(\varphi) \cdot \hat{e}_2)\right)$$

   und setzen Sie

   $$f(r, \varphi) := \sqrt{g(DF_{(r,\varphi)} \cdot e_2, DF_{(r,\varphi)} \cdot e_2)}\,.$$

   Zeigen Sie:

   (a) Die Christoffelsymbole für die Immersion F sind gegeben durch: $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0$, $\Gamma^2_{12} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial r}$, $\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial r}$, $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

   (b) Es gelten die Identitäten

   $$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} f(r, \varphi) &= 0 \\ \lim_{r \to 0} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \varphi) &= 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r, \varphi) &= -f(r, \varphi) \cdot K(F(r, \varphi)) \\ \lim_{r \to 0} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3}(r, \varphi) &= -K(p) \end{aligned}$$

   (c) Es gilt

   $$K(p) = \frac{3}{\pi} \cdot \lim_{r \to 0} \frac{2\pi r - L(S_r(p))}{r^3}\,,$$

   wobei $L(S_r(p))$ die Länge des Abstandskreises $S_r(p)$ vom Radius r um p in (M^2, g) bezeichnet.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 18.4.2004, 12:15.