Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 4

12. (*Isometrie-Invarianz von ∇ und R*) Es seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Ableitungen ∇ und $\tilde{\nabla}$ und $f : (M, g) \to (N, \tilde{g})$ eine lokale Isometrie, d.h. für alle $v, w \in TM$ gilt: $g(v, w) = \tilde{g}(df \cdot v, df \cdot w)$. Ferner seien X, Y, Z Vektorfelder auf M, die f-verwandt zu Vektorfeldern $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ auf N sind. Zeigen Sie:

    (a) $\nabla_X Y$ ist f-verwandt zu $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ (Hinweis: Koszul-Formel).

    (b) Lokale Isometrien bilden Geodätische auf Geodätische ab.

    (c) Bezeichnen R und $\tilde{R}$ die Krümmungstensoren bezüglich der kovarianten Ableitungen ∇ und $\tilde{\nabla}$, so ist $R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ f-verwandt zu $\tilde{R}_{\tilde{X},\tilde{Y}} \tilde{Z}$.

13. Es sei (M, g) zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und f_1, f_2 Isometrien von (M, g). Zeigen Sie: Gelten in einen Punkt $p \in M$ die Identitäten $f_1(p) = f_2(p)$ und $(df_1)_p = (df_2)_p$, so folgt $f_1 = f_2$.

14. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [0, L] \to M$ eine Geodätische. Zeigen Sie, dass ein differenzierbares Vektorfeld X längs c genau dann ein Jacobi-Vektorfeld längs c ist, wenn X das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation von c ist.

15. (*Normalkoordinaten*) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $r = \mathrm{inj}(p)$ und $(e_1, ..., e_n)$ Orthonormal-Basis von (T_pM, g_p). Zeigen Sie:

    (a) Die Abbildung $x^{-1} : B_r(0) \to \exp_p(B_r(0_p))\,;\ (x_1, ..., x_n) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i)$ ist ein Diffeomorphismus.

    (b) Für die Karte $x : \exp_p(B_r(0_p)) \to B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ um p gilt:

    $$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k \leq n\,.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 2.5.2004, 12:15.