Übungen zu Differentialgeometrie II

Serie 8

27. (*Krümmungstensor und Schnittkrümmungen*) Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass der $(4,0)$-Krümmungstensor $R(X,Y,Z,W) := g(R_{XY}Z,W)$ durch Schnittkrümmungen bereits vollständig bestimmt ist.

    Hinweis: Es gilt

$$\begin{aligned} 6\cdot R(X,Y,Z,W) &= R(X,Y+Z,Y+Z,W)-R(X,Y-Z,Y-Z,W) \\ &\quad -R(Y,X+Z,X+Z,W)+R(Y,X-Z,X-Z,W)\,. \end{aligned}$$

28. (*Krümmungsoperator*) Sei (M^n,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p\in M^n$.

    Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$b_{R_p}:\Lambda_2(T_pM^n)\times\Lambda_2(T_pM^n)\to\mathbb{R}\ ;\ \ (x_p\wedge y_p, z_p\wedge w_p)\mapsto -R(x_p,y_p,z_p,w_p)$$

    wohldefiniert und symmetrisch ist. Zeigen Sie ferner, dass das Skalarprodukt g_p auf T_pM^n ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ auf $\Lambda_2(T_pM^n)$ induziert, so dass für eine Orthonormalbasis $(e_1,...,e_n)$ von (T_pM^n,g_p) die 2-Formen $e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3,...,e_{n-1}\wedge e_n$ eine Orthonormalbasis von $(\Lambda_2(T_pM^n),\langle\cdot,\cdot\rangle_p)$ bilden. Folgern Sie, dass der durch die Identität

$$\langle R_p\cdot(x_p\wedge y_p), z_p\wedge w_p\rangle_p \;=\; b_{R_p}(x_p\wedge y_p, z_p\wedge w_p)$$

    definierte Krümmungsoperator $R_p:\Lambda_2(T_pM^n)\to\Lambda_2(T_pM^n)$ wohldefiniert und selbstadjungiert ist.

29. Wir versehen den Euklidischen Raum $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ mit der Riemannschen Metrik $\hat g(U,V) := \mathrm{Spur}(U\cdot V^t)$ und bezeichnen mit $(\mathrm{SO}(n), g=\hat g|_{T\mathrm{SO(n)}})$ die Riemannsche Untermannigfaltigkeit der speziellen orthogonalen Matrizen. Sei X ein linksinvariantes Vektorfeld auf $\mathrm{SO}(n)$, d.h. $X(g)=d(L_g)_e(\bar X)$ für $\bar X\in T_e\mathrm{SO}(n)$.

    Zeigen Sie für linksinvariante Vektorfelder X,Y,Z folgende Identität:

$$g(R_{X,Y}Z,W) \;=\; \frac{1}{4}\cdot g([X,Y],[W,Z])\,.$$

    Machen Sie sich klar, dass die gleiche Identität für jede kompakte Untergruppe von $\mathrm{SO}(n)$ gilt, welche Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{SO}(n)$ ist.

    Hinweis: Weisen Sie zuerst die Identitäten $\nabla_X X=0$, $\nabla_X Y=\frac{1}{2}\cdot[X,Y]$ und $R_{X,Y}Z=\frac{1}{4}\cdot[Z,[X,Y]]$ nach, ∇ Levi-Civita-Ableitung von $(\mathrm{SO}(n),g)$.

30. Zeigen Sie, dass der Krümmungsoperator der in Aufgabe 29. betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathrm{SO}(n),g)$ nichtnegative Eigenwerte besitzt. Können Sie auch das Bild dieses Krümmungsoperators im Punkt $I\in\mathrm{SO}(n)$ bestimmen?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 6.6.2004, 12:15.