Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II

Serie 2

Aufgabe 1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und N eine Teilmenge von M. Zeigen Sie:

a.) N ist abgeschlossen $\iff \partial N \subseteq N$

b.) N ist offen $\iff \partial N \subseteq (M \setminus N)$

Aufgabe 2. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und N eine Teilmenge von M. Wir definieren den *Abschluss* von N als die Menge $\bar{N} := N \cup \partial N$. Es bezeichne X die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von M, die N enthalten. Zeigen Sie

$$\bar{N} = \bigcap_{A \in X} A$$

Die Menge $\bar{N}$ ist somit die kleinste abgeschlossene Menge, die N enthält.

Aufgabe 3. Zeigen Sie vermittels vollständiger Induktion: Jede beschränkte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 4. Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $F : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante $M > 0$, welche der Bedingung $b - a < \frac{1}{M}$ genügt. Zeigen Sie, dass für einen Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$y'(t) = F(y(t), t)\,, \qquad y(a) = y_0$$

für $t \in [a, b]$. Zeigen Sie hierzu:

a.) Der normierte Vektorraum $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ ist vollständig (Hinweis: Vorlesung Analysis I).

b.) Die Abbildung

$$K : (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \to (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \;;\; f \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_a^t F(f(s), s)\,\mathrm{d}s\right)$$

ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$.

c.) Die eindeutig bestimme Lösung $f \in C^0[a, b]$ der Fixpunktgleichung $K(f) = f$ ist stetig differenzierbar.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 21.4.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.