Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II
Serie 3

Aufgabe 1. Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie ihre Bogenlängen:

a.) $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \; ; \; t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ b.) $c : [0, \infty) \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \; ; \; t \mapsto e^{-t} e^{it}$

Aufgabe 2. Es sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is symmetrisch, bilinear und es gilt $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist. Weiter definiert man $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}; \; v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Beweisen Sie nun den Satz des Pythagoras und die Parallelogrammgleichung, d.h. zeigen Sie für alle $v, w \in V$ die Identitäten:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \|v\|^2 + 2 \cdot \langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= 2 \cdot \|v\|^2 + 2 \cdot \|w\|^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie unter den Voraussetzungen von Aufgabe 2 die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, d.h. zeigen Sie für alle $v, w \in V$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Aufgabe 4. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $M := \Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ihr Graph. Für je zwei Punkte $x, y \in M$ bezeichnen wir mit $X_{x,y}$ die Menge der rektifizierbaren Kurven $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $c(0) = x$, $c(1) = y$ und $c(t) \in M$ für alle $t \in [0, 1]$. Unter der Annahme, dass für alle $x, y \in M$ die Menge $X_{x,y}$ nicht leer ist, setzen wir

$$d^i_M(x, y) := \inf\{L(c) \mid c \in X_{x,y}\}$$

Zeigen Sie, dass d^i_M eine Metrik auf M ist.

Zusatzaufgabe 5. Es sei $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine stetige Funktion mit $f|_{[0,\frac{1}{3}]} \equiv 0$, $f_{[\frac{2}{3},1]} \equiv 1$ und $f(x + 2) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner sei

$$c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \; ; \; t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f(3^{2n-1} \cdot t)\,, \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f(3^{2n} \cdot t)$$

Zeigen Sie:

- Die Kurve c ist stetig.
- Jedes $x \in [0,1]$ lässt eine Binärdarstellung der Form $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} b_n$ zu mit $b_n \in \{0,1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie, dass für jedes $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0,1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot a_{2n-1}\,, \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot a_{2n}$$

- Zeigen Sie $c(t_0) = (x_0, y_0)$ für $t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$.
- Jede stetige, surjektive Kurve $\tilde{c} : [0,1] \to [0,1]^2$ ist nicht rektifizierbar.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 28.4.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.