Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

Sommersemester 2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis II

Serie 10

Aufgabe 1. Wir bezeichnen mit $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ die obere Halbebene von $\mathbb{R}^2$. Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \; ; \; (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (-x, y)$$

a.) Zeigen Sie, dass das Differential von f in jedem Punkt ein Isomorphismus ist.

b.) Zeigen Sie, dass die Funktion f ein globaler Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x,y) \mapsto x^2(1-x^2) - 4y^2 \, .$$

Wir bezeichnen mit $M_0^f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ die Null-Niveaumenge von f.

a.) Geben Sie in einer Umgebung eines beliebigen Punktes $(x,y) \in M_0^f \setminus \{(0,0)\}$ eine explizite Darstellung von M_0^f als Graph einer Funktion (über einer beliebigen Koordinatenachse) an.

b.) Lässt sich M_0^f im Punkt $(0,0)$ ebenfalls in dieser Form darstellen?

Aufgabe 3. Wir bezeichnen mit $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid A^T A = E_n\}$ die Gruppe der *orthogonalen* Matrizen und mit $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ den Vektorraum der *symmetrischen* Matrizen. Gegeben sei die Abbildung

$$F : \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R}) \; ; \; X \mapsto X^T X$$

Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathrm{O}(n)$ gilt: $\mathrm{rk} DF_A = \dim \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$.

Aufgabe 4. Geben Sie einen Diffeomorphismus von der (offenen) Einheitskugel

$$B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

auf den (offenen) Würfel $(-1,1)^n$ an.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n \; ; \; x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 23.6.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.