Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten
Serie 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)\cdot(x-y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

(versehen mit der Spurtopologie) keine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2. Es bezeichne $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ und $N := (0,0,1)^t, S := (0,0,-1)^t$ den Nord- bzw. Südpol auf der S^2. Zeigen Sie, dass die Karten

$$X_N : S^2\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^2\,;\,(x,y,z)^t \mapsto \frac{1}{1-z}(x,y)^t$$

$$X_N : S^2\backslash\{S\} \to \mathbb{R}^2\,;\,(x,y,z)^t \mapsto \frac{1}{1+z}(x,-y)^t$$

einen Atlas von S^2 definieren, dessen Kartenwechsel biholomorph sind. (S^2 ist mit diesem Atlas *„komplexe Mannigfaltigkeit"* der Dimension 1 oder auch *„komplexe Kurve"*).

Aufgabe 3. (*Produktmannigfaltigkeiten*) Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $M \times N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4. Gegeben seien $R > r > 0$ und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,;\,(x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 - 4R^2(x^2+y^2)$$

Zeigen Sie:

a) Die Menge $T_{R,r} := g^{-1}(0)$ (versehen mit der Spurtopologie) ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

b) $T_{R,r}$ ist diffeomorph zur Produktmannigfaltigkeit $S^1 \times S^1$.
   Hinweis: Betten Sie $S^1 \times S^1$ als Rotationstorus in den $\mathbb{R}^3$ ein.

Aufgabe 5. (*Exotische Sphären*) Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne Σ_k^7 die Menge aller $(z_1, ..., z_5) \in \mathbb{C}^5 = \mathbb{R}^{10}$ mit

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^{6k-1} = 0$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1.$$

Zeigen Sie, dass Σ_k^7 eine kompakte 7-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{10}$ ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 4.5.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.