Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten

Serie 5

Aufgabe 1. Es seien M und N kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten derselben Dimension. Zeigen Sie: Eine Einbettung $f : M \to N$ ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 2. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Es existieren Punkte $p, q \in M$ mit $p \neq q$, so dass die Differentiale df_p und df_q verschwinden.

Aufgabe 3. (*Veronese-Einbettung*) Sei $n \geq 2$ und $V_{n-1} := \{A \in Mat(n, \mathbb{R}) : A^2 = A, A^t = A \text{ und Rang } A = 1\}$. Zeigen Sie:

a) $V_{n-1} = \{v \cdot v^t : v \in \mathbb{R}^n, ||v|| = 1\}$ (Hinweis: Für $||v|| = 1$ ist $v \cdot v^t$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R} \cdot v$.)

b) Für $i = 1, ..., n$ betrachten Sie die Abbildung

$$\phi_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n\,;\ (w_1, ..., w_{n-1})^t \mapsto (w_1, ..., w_{i-1}, 1, w_i, ..., w_{n-1})^t.$$

Sei $M_i := \{A \in V_{n-1} : a_{ii} > 0\}$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass

$$f_i : \mathbb{R}^{n-1} \to M_i\,;\ w \mapsto \frac{1}{1 + ||w||^2} \cdot \phi_i(w) \cdot \phi_i(w)^t$$

eine surjektive Einbettung ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_i^{-1} : M_i \to \mathbb{R}^{n-1}\,;\ A \mapsto pr_i(\frac{Ae_i}{a_{ii}})$ Umkehrabbildung von f_i ist, wobei $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}\,;\ (v_1, ..., v_n)^t \mapsto (v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)^t$.

c) Folgern Sie, dass V_{n-1} eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$.

Anmerkung: Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\{\pm \mathrm{id}\}$ wird vermittels $\mathbb{R} \cdot v \mapsto \frac{1}{||v||^2} \cdot v \cdot v^t$ bijektiv auf V_{n-1} abgebildet. Diese Abbildung heißt *Veronese-Einbettung*.

Aufgabe 4. (*4 Zusatzpunkte*) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Zeigen Sie: es existiert eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\{0\}) = A$.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 26.5.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.