Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Sommersemester 09
WWU Münster

Übungen zu Differentialformen und Mannigfaltigkeiten
Serie 8

Aufgabe 1.

a) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$. Zeigen Sie $\mathrm{Alt}^n(F)(\omega) = (\det F) \cdot \omega$.

b) Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $F : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $\omega \in \Omega^n(V)$. Berechnen Sie $F^*\omega$.

Aufgabe 2.

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie: Es existieren Isomorphismen $A : \Omega^{n-1}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ und $B : \Omega^n(U) \to C^\infty(U)$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{n-1}(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "A"'] & \Omega^n(U) \arrow[d, "B"] \\
\mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"] & C^\infty
\end{tikzcd}$$

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $C \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Sei $N : \partial C \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Für $x \in \partial C$ heiße eine Orthonormalbasis $(v_1, ..., v_{n-1})$ von $T_x\partial C$ *orientiert*, wenn $(N(x), v_1, ..., v_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. wenn $\det(N(x), v_1, ..., v_{n-1}) > 0$ ist. Für $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ und $x \in \partial C$ sei

$$\omega_x := \omega(x)(v_1, ..., v_{n-1})$$

für eine orientierte Orthonormalbasis $(v_1, ..., v_{n-1})$ von $T_x\partial C$.

Zeigen Sie: Für alle $x \in \partial C$ ist ω_x unabhängig von der Wahl der orientierten Orthonormalbasis. Ferner ist

$$g : \partial C \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \omega_x$$

über ∂C integrierbar.

Sei nun $d\omega = f \cdot (dx_1 \wedge ... \wedge dx_n)$ für $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$\int_C f\, dx_1 ... dx_n = \int_{\partial C} g\, dS.$$

Aufgabe 3. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene und $\varphi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung. Zeigen Sie

a) $\varphi^*(w \wedge \tilde{w}) = (\varphi^* w) \wedge (\varphi^* \tilde{w})$ für alle $w, \tilde{w} \in \Omega^*(V)$.

b) $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$ für alle $g \in \Omega^0(V)$.

c) $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$ für alle $w \in \Omega^*(V)$.

Aufgabe 4. Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Für $k \leq n$ definiere $\mathrm{Alt}^k(M^n) := \bigcup_{p \in M^n} \mathrm{Alt}^k(T_p M^n)$. Zeigen Sie: Es existiert eine Topologie auf $\mathrm{Alt}^k(M^n)$, so dass $\mathrm{Alt}^k(M^n)$ Totalraum eines Vektorbündels über M^n ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 22.6.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.