Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 10

37. (*Geodätische auf Rotationsflächen*) Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,;\ u \mapsto (a(u), b(u))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $a > 0$. Betrachten Sie die Immersion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ \ (u, \varphi) \mapsto (a(u) \cdot \cos(\varphi), a(u) \cdot \sin(\varphi), b(u))$$

und beschreiben Sie das qualitative Verhalten einer Geodätischen $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ für die zurückgeholte Metrik $g := F^* g_0$ auf $\mathbb{R}^2$.

38. (*Parallelverschiebung auf S^2*) Betrachten Sie die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ versehen mit der ersten Fundamentalform. Für den Breitenkreis

$$c : [0, 2\pi] \to S^2, \varphi \mapsto (\cos(u) \cdot \cos(\varphi), \cos(u) \cdot \sin(\varphi), \sin(u))^T$$

der geographischen Breite $u \in (-\pi/2, +\pi/2)$ bestimme man die Parallelverschiebung P^c längs c.

39. (*Normalkoordinaten*) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $r > 0$ so klein, dass $\exp_p : B_r(0_p) \to \exp_p(B_r(0_p))$ Diffeomorphismus ist. Sei ferner $(e_1, ..., e_n)$ Orthonormal-Basis von (T_pM, g_p). Zeigen Sie:

   (a) Die Abbildung $x^{-1} : B_r(0) \to \exp_p(B_r(0_p))\,;\ (x_1, ..., x_n) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i)$ ist ein Diffeomorphismus.

   (b) Für die Karte $x : \exp_p(B_r(0_p)) \to B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ um p gilt:

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \quad \text{ und } \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \text{für alle } 1 \le i, j, k \le n\,.$$

40. (*Killing-Vektorfelder*) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gegeben sei ein differenzierbarer Fluss $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ mit Flussvektorfeld $X(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \phi_t(p)$. Zeigen Sie:

   (a) Es gilt

$$\langle \nabla_v X, v \rangle = 1/2 \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle (d\phi_t)(v), (d\phi_t)(v) \rangle$$

   für alle $p \in M, v \in T_pM$ (man setze $v = \dot{c}(0)$ für $c : I \to M$ und berechne $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} \| \frac{\partial}{\partial s} \phi_t(c(s)) \|^2$).

   (b) Die Diffeomorphismen ϕ_t sind genau dann Isometrien, wenn für jedes $p \in M$ der Endomorphismus $v \mapsto \nabla_v X$ von T_pM schiefsymmetrisch ist bzgl. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_p$. In diesem Fall nennt man X *Killing-Vektorfeld* oder *infinitesimale Isometrie.*

   (c) Für ein Killing-Vektorfeld X und eine Geodätische c ist die Funktion

$$w(t) = \langle X(t), \dot{c}(t) \rangle$$

   konstant.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 22.12.2004, 11:15.