Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 12

46. (*Gauß-Codazzi-Gleichung*) Es sei (M, g) Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $(N, \hat{g})$. Zeigen Sie folgende Identität für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $\xi \in \nu(M)$:
$$\langle R_{XY}Z, \xi\rangle = \langle (\hat{\nabla}_X \alpha)(Y, Z) - (\hat{\nabla}_Y \alpha)(X, Z), \xi\rangle\,.$$

47. Sei $n \geq 3$ und (M^n, g) Riemannsche Hyperfläche in $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$. Zeigen Sie, dass für $p \in M^n$ nicht alle Schnittkrümmungen von (M, g) im Punkt p negative sein können.

48. Eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit (M, g) einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(N, \hat{g})$ nennt man *totalgeodätisch*, falls jede Geodätische in (M, g) auch Geodätische in $(N, \hat{g})$ ist. Zeigen Sie, dass (M, g) genau dann totalgeodätisch ist, wenn die zweite Fundamentalform α Null ist.

49. Sei $(N, \hat{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : (N, \hat{g}) \to (N, \hat{g})$ Isometrie. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten der Fixpunktmenge
$$X_f := \{p \in N \mid f(p) = p\}$$
totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten sind.

50. (*Hyperbolischer Raum*) Betrachten Sie $\mathbb{R}^{n+1}$ versehen mit dem Minkowski-Skalarprodukt $b(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$. Zeigen Sie:
    (a) Der Hyperbolische Raum
    $$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid b(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}$$
    ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.
    (b) Für $x \in H^n$ ist $g_x := b|_{T_x H^n \times T_x H^n}$ positive definit.
    (c) Die Schnittkrümmung von (H^n, g) ist konstant -1.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 19.01.2005, 10:15.