Übungen zu Differentialgeometrie I

Serie 2

5. (*Rotationstorus*) Gegeben seien $R > r > 0$ und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ;\ \ (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 - 4R^2(x^2+y^2)\,.$$

Die Urbildmenge $T_{R,r} := g^{-1}(0)$ wird Rotationstorus genannt (Skizze!). Zeigen Sie: Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ ;\ \ (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cdot\cos(u))\cdot\cos(v) \\ (R + r\cdot\cos(u))\cdot\sin(v) \\ r\cdot\sin(u) \end{pmatrix}$$

ist eine Immersion mit Bild $f = T_{R,r}$.

6. (*Exotische Sphären*) Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne Σ_k^7 die Menge aller $(z_1, ..., z_5) \in \mathbb{C}^5 = \mathbb{R}^{10}$ mit:

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} &= 0 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Σ_k^7 eine kompakte, 7-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{10}$ ist.

7. (*Veronese-Einbettungen*) Es sei $n \geq 2$ und $V_{n-1} := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) : A^2 = A, A = A^t \text{ und Rang } A = 1\}$. Zeigen Sie:

   (a) $V_{n-1} = \{v\cdot v^t : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| = 1\}$ (Hinweis: Für $\|v\| = 1$ ist $v\cdot v^t$ die orthogonale Projektion des $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}\cdot v$).

   (b) Für $i = 1, \ldots, n$ betrachten Sie die Abbildung

   $$\phi_i : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n\ ;\ (w_1, \ldots, w_{n-1})^t \mapsto (w_1, \ldots, w_{i-1}, 1, w_i, \ldots, w_{n-1})^t\,.$$

   Zeigen Sie, dass

   $$f_i : \mathbb{R}^{n-1} \to M_i := \{A \in V_{n-1} \mid a_{ii} > 0\}\ ;\ \ w \mapsto \frac{1}{1+\|w\|^2}\cdot\phi_i(w)\cdot(\phi_i(w))^t$$

   eine surjektive Einbettung ist.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_i^{-1} : M_i \to \mathbb{R}^{n-1}\ ;\ A \mapsto pr_i(\frac{Ae_i}{a_{ii}})$ Umkehrfunktion von f_i ist, wobei $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}\ ;\ (v_1, \ldots, v_n)^t \mapsto (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)^t$.

   (c) Folgern Sie, dass V_{n-1} eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

Wir werden später zeigen, dass die Menge aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^n$, der reell projektive Raum $\mathbb{RP}^{n-1}$, eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist; sie wird mittels $\mathbb{R}\cdot\tilde{v} \mapsto \frac{1}{\|\tilde{v}\|^2}\tilde{v}\cdot\tilde{v}^t$ bijektiv auf V_{n-1} abgebildet; die Abbildung heißt „*Veronese-Einbettung*“ des $\mathbb{RP}^{n-1}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 27.10.2004, 11:15.