Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 7

Aufgabe 1. Seien a, b, c reelle Zahlen mit $a < b < c$ und seien weiter $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie: Gilt $f(b) = g(b)$, so ist die Funktion

$$h : [a, c] \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{für } x \in [b, c] \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig.

Aufgabe 2. Ein *Häufungspunkt* einer nicht-leeren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Punkt $\bar{x} \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $x_\epsilon \in (M \setminus \{\bar{x}\}) \cap B_\epsilon(\bar{x})$.

a.) Zeigen Sie: Der Punkt $\bar{x} \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt von M genau dann, wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M \setminus \{\bar{x}\}$ existiert, die gegen $\bar{x}$ konvergiert.

b.) Beweisen Sie: Enthält M zusätzlich keinen seiner Häufungspunkte, dann ist jede Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ stetig.

c.) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig ist. Ist sie zu einer stetigen Funktion $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\bar{f}|_{\mathbb{Q}} = f$ fortsetzbar?

Aufgabe 3.

a.) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-leere Teilmenge der komplexen Zahlen und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen von D nach $\mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. Zeigen Sie: Existiert eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht-negativer reeller Zahlen und ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $|f_k(z)| \leq a_k$ für alle $k \geq N$ und alle $z \in D$ gilt, dann konvergiert $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

b.) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert: Für $m \in \mathbb{Z}$ und $x \in \left[\frac{m}{4^n}, \frac{m+1}{4^n}\right]$ setzen wir $f_n(x) := \left|x - \frac{2m+1}{2 \cdot 4^n}\right|$. Skizzieren Sie die Folgenglieder f_{100} und f_{101}. Zeigen Sie, dass ein jedes f_n wohldefiniert und stetig ist. Folgern Sie nun, dass $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ eine stetige Funktion darstellt.

Aufgabe 4. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine nicht-leere Teilmenge und sei weiter $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $H^0(M, \mathbb{Z}_2)$ die Menge der stetigen Abbildungen $f : M \to \mathbb{Z}_2$. Die Menge M heißt *zusammenhängend*, wenn $H^0(M, \mathbb{Z}_2)$ genau zwei Elemente besitzt. Zeigen Sie:

a.) Ist die Menge $H^0(M, \mathbb{Z}_2)$ endlich, so enthält sie genau 2^n Elemente für ein $n \in \mathbb{N}$. Man nennt dann n die „Zahl der Zusammenhangskomponenten“ von M.

b.) Die Menge $\mathbb{C}$ ist zusammenhängend, wohingegen $[0, 1) \cup (1, 2)$ genau zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

c.) Die Menge $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ besitzt unendlich viele Zusammenhangskomponenten.

Wir ordnen nun jeder Funktion $f : M \to \mathbb{Z}_2$ die Teilmenge $N_f := \{x \in M \mid f(x) = 1\}$ zu. Auf diese Weise ordnen wir $H^0(M, \mathbb{Z}_2)$ einer Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M zu, welche wir wieder mit $H^0(M, \mathbb{Z}_2)$ bezeichnen. Beweisen Sie:

d.) Es gilt $H^0(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_2) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wohingegen $H^0(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2)$ echte Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 3.12.2007, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.