Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 9

Aufgabe 1. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Existieren rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert an der Stelle x_0, und stimmen diese überein, d.h. gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x),$$

so lässt sich die Funktion f zu einer stetigen Funktion $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit der Eigenschaft $\bar{f}|_{\mathbb{R}\setminus\{x_0\}} = f$) fortsetzen.

Aufgabe 2. Finden Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Funktion

$$f(x) = \frac{-x^4 - x^3 + x + 1}{-x^5 + x^4 - x^3 + x^2}$$

Bestimmen Sie eine stetige Fortsetzung $\bar{f}$ von f mit Definitionsbereich $\bar{\mathbb{D}} \supsetneq \mathbb{D}$. Untersuchen Sie jeweils, ob $\bar{f}$ ein Minimum/Maximum auf ganz $\bar{\mathbb{D}}$ respektive auf $(-\infty, -1]$ besitzt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die jeden Wert genau zweimal annimmt.

Aufgabe 4. Es bezeichne C das Cantorsche Diskontinuum. In Aufgabe 8.4 haben wir bewiesen, dass C genau aus den reellen Zahlen der Form $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ mit $a_k \in \{0, 2\}$ besteht. Wir definieren nun eine Funktion vermittels

$$\phi : C \to [0,1] \;\; ; \;\; x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$

Zeigen Sie, dass ϕ monoton und stetig ist und eine (eindeutige) monotone stetige Fortsetzung zu einer Funktion $\bar{\phi} : [0,1] \to [0,1]$ besitzt.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 17.12.2007, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.