Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 11

Aufgabe 1. Für $a > 0$ sei $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \ ; \ x \mapsto \exp(x \cdot \ln(a))$.

a.) Zeigen Sie: Für $a \neq 1$ ist die Funktion $\exp_a$ bijektiv und die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (der Logarithmus zur Basis a) erfüllt folgende Identitäten:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

b.) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto (\cos(\sin(x)))^2$$
$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto (x^x)^x$$

Aufgabe 2.

a.) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man gerade (bzw. ungerade), falls $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$) für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie: Ist eine differenzierbare Funktion f gerade (bzw. ungerade), so ist f' eine ungerade (bzw. gerade) Funktion.

b.) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 7.3 definierte Funktion f in keinem Punkt differenzierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie:

a.) Es sei $f'(0) > 0$. Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass $f|_{[-\epsilon,\epsilon]}$ streng monoton steigend ist.

b.) Für die Funktion $f' : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gilt der Zwischenwertsatz.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 14.1.2007, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.