Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Amann

WS 2007/2008
WWU Münster

Übungen zur Analysis I
Serie 13

Aufgabe 1. Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Sei weiterhin $p(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$. Zeigen Sie: Es existiert ein $\bar{x} \in [a, b]$, so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x = f(\bar{x}) \int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a.) $\int x^3 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ b.) $\int \frac{x^3+4x+2}{x^2+4}\mathrm{d}x$

Aufgabe 3. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $I_m(x) := \int_0^x \sin^m(t)\mathrm{d}t$. Bestimmen Sie für $m \geq 2$ eine Rekursionsformel der Form $I_m(x) = f(x, I_{m-2}(x))$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = 0$$

Zusatzaufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \;\; ; \;\; (n, k) \to \frac{1}{2}(n+k)(n+k+1) + k$$

eine Bijektion ist. Folgern Sie, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 28.1.2008, um 16.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.