

# Übungen zur Analysis I

## Serie 14

**Aufgabe 1.** Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{für vollständig gekürztes } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ist  $f$  eine Regelfunktion?

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

**Aufgabe 3.** Es seien  $f, g$  Regelfunktionen auf  $[a, b)$  mit den Eigenschaften

- Die Funktion  $f$  hat eine beschränkte Stammfunktion.
- Die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar und monoton fallend mit  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ .

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  existiert.

**Aufgabe 4.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei die Funktion

$$P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1}{(2^n) \cdot (n!)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

gegeben. Zeigen Sie:

- Die Funktion  $P_n$  hat genau  $n$  paarweise verschiedene Nullstellen in  $(-1, 1)$ .
- Es gilt:

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

- Für  $n \neq m$  gilt:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

*Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Dienstag, den 5.2.2008, um 8.15 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.*