Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 4

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für eine Teilmenge $X_0 \in \mathscr{A}$ sei

$$\mathscr{A}_0 := \mathscr{A} \cap X_0 = \{A \cap X_0 : A \in \mathscr{A}\}$$

und $\mu_0 := \mu|_{\mathscr{A}_0}$. Zeigen Sie:

a) $(X_0, \mathscr{A}_0, \mu_0)$ ist ein Maßraum.

b) Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar, so auch $f_0 : X_0 \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ x \mapsto f(x)$.

c) Für eine Funktion $f_0 : X_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\, x \mapsto \begin{cases} f_0(x)\,, & \text{wenn } x \in X_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt: ist f_0 meßbar, so auch f.

d) Die Funktion f_0 ist genau dann μ_0-integrierbar, wenn f μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt: $\int_{X_0} f_0\, d\mu_0 = \int_X f\, d\mu$.

Aufgabe 2. Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1, \lambda)$. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine Folge (φ_n) nicht-negativer Treppenfunktion $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n\, d\lambda \neq 0$.

b) Es existiert eine nicht-meßbare Funktion f auf $\mathbb{R}$, so daß $|f|$ integrierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $\epsilon > 0$ und $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei

$$U_i := (q_i - \frac{\epsilon}{2^{i+1}}, q_i + \frac{\epsilon}{2^{i+1}})$$

und $U := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Zeigen Sie:

a) U ist offen und dicht in $\mathbb{R}$.

b) Es gilt $\lambda(U) < \epsilon$.

Aufgabe 4. Konstruieren Sie eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-Borel-meßbar ist.
Anleitung. Betrachten Sie ein Vertretersystem K von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Die Existenz eines solchen Vertretersystems folgt aus dem Auswahlaxiom. Leiten Sie einen Widerspruch her, indem Sie zeigen, dass aus der Annahme "K ist meßbar", sowohl $\lambda(K) > 0$ als auch $\lambda(K) = 0$ folgt.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 17.11.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.