Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 6

Aufgabe 1. Seien $(X_1, \mathscr{A}_1, \mu_1), ..., (X_n, \mathscr{A}_n, \mu_n)$ Maßräume mit σ-endlichen Maßen $\mu_1, ..., \mu_n$. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n$ auf $\mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$ existiert, so daß

$$\mu(A_1 \times ... \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot ... \cdot \mu_n(A_n)$$

für alle $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, ..., n$. Für jede Menge $Q \in \mathscr{A}_1 \otimes ... \otimes \mathscr{A}_n$ gilt:

$$\mu(Q) = \int_{X_n} (\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_{n-1})(Q_{x_n})\, d\mu_n(x_n)$$

mit $Q_{x_n} = \{(x_1, ..., x_{n-1}) | (x_1, ..., x_n) \in Q\}$. Ferner gilt:

$$(\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n = \mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n\,,$$

wenn man $(X_1 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$ mit $X_1 \times ... \times X_n$ identifiziert.

Aufgabe 2.

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$P := \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq \sin(x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}(1 - z), 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und fertigen Sie eine Skizze von P an.

b) Sei $M := \{(x, y) : 0 < y < x\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

$$\int_M y \cdot e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}\, d\lambda^2(x, y) = \frac{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\pi}}{2}$$

Aufgabe 3. (*Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*) Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Es seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ meßbar und $|f|^2, |g|^2$ integrierbar. Zeigen Sie

$$\Big(\int_X |f \cdot g| d\mu\Big)^2 \leq \Big(\int_X |f|^2 d\mu\Big) \cdot \Big(\int_X |g|^2 d\mu\Big)$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $(x, y) \mapsto |f(x)f(y)g(x)g(y)|$.

Aufgabe 4. (*Volumen von Rotationskörpern*) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion und

$$R(f) := \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\} .$$

Zeigen Sie:

$$\lambda^3(R(f)) = \pi \cdot \int_{[a,b]} f(x)^2 \, d\lambda(x)$$

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 1.12.2008, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude.