Prof. Dr. C. Böhm
Dipl. Math. M. Röer

Wintersemester 08/09
WWU Münster

Übungen zur Analysis III
Serie 9

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{H}_+ := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Zeigen Sie:

$$\Phi : B_1^{n-1}(0) \times (0, \infty) \to \mathbb{H}_+ \,;\, (y, r) \mapsto (r \cdot y, r \cdot \sqrt{1 - \|y\|^2})$$

ist ein C^1-Diffeomorphismus mit $\det(D\Phi)_{(y,r)} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|y\|^2}}$.

Aufgabe 2. (*Obere Halbsphäre*) Für $r > 0$ sei

$$S_{r,+}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r, x_n > 0\}$$

Zeigen Sie:

a) $S_{r,+}^{n-1}$ ist Graph einer stetig differenzierbaren Funktion F.

b) Sei $f : S_{r,+}^{n-1} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{S_{r,+}^{n-1}} f(x) dS(x) = \int_{B_1^{n-1}(0)} \frac{f(r \cdot y, r \cdot \sqrt{1 - \|y\|^2})}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} \cdot r^{n-1} \, d\lambda^{n-1}(y)$$

Aufgabe 3. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene und $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie: schneiden sich E und M^{n-1} in genau einem Punkt a, so gilt $a + T_a M^{n-1} = E$.

Aufgabe 4. Seien $M^{n-1}, \tilde{M}^{n-1}$ $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ mit $N := M^{n-1} \cap \tilde{M}^{n-1} \neq \emptyset$. Für alle $a \in N$ gelte ferner $\dim(T_a M \cap T_a \tilde{M}^{n-1}) = n - 2$. Dann ist N eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5*. (*Der irrationale Fluss auf dem Torus*) Betrachten Sie den Torus $T^2 := S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: für $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ist die Menge $F^1 := \{(e^{it}, e^{i\alpha t}) : t \in \mathbb{R}\}$ dicht in T^2.

Aufgabe 6*. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Borel-Maß λ auf $\mathbb{R}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 7*. Zeigen Sie, dass die Menge E aller reellen Zahlen, deren ungerade Dezimalkoeffizienten eine periodische Folge bilden, Borel-meßbar ist und berechnen Sie das Lebesgue-Maß von E.

Aufgabe 8*. (*Einbettung der projektiven Ebene*) Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6\,;\ (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

und zeigen Sie, dass $M^2 := f(S^2)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$ ist.

Ein frohes Fest und ein gutes neues Jahr wünschen wir Ihnen.

Abgabe der Lösungen zu diesem Blatt bis Montag, den 5.1.2009, um 10.00 Uhr, in dem zur jeweiligen Übungsgruppe gehörigen Briefkasten im Hörsaalgebäude. Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben können bis zum Ende des Semesters bearbeitet werden.