Der Polymath Beweis des Density Hales-Jewett Theorems

Dr. Christian Serpé

14. Januar 2011

Tic-Tac-Toe

O	X	X
X	O	O
X	O	X

In der Regel gibt es keinen Gewinner.

Frage: Wie kann man das Spiel verändern, damit es interessanter wird?

Tic-Tac-Toe im $[k]^n$

- Spielfeld vergrössern, i.e. $\{1, ..., k\}^2$
- Anzahl r der Spieler erhöhen
- Dimension erhöhen, i.e. $\{1, ..., k\}^n$

Es gilt:

Für alle r, k gibt es stets ein n, so dass es beim spielen von Tic-Tac-Toe mit r Spielern auf dem Spielfeld $\{1, \ldots, k\}^n$ immer einen Gewinner gibt.

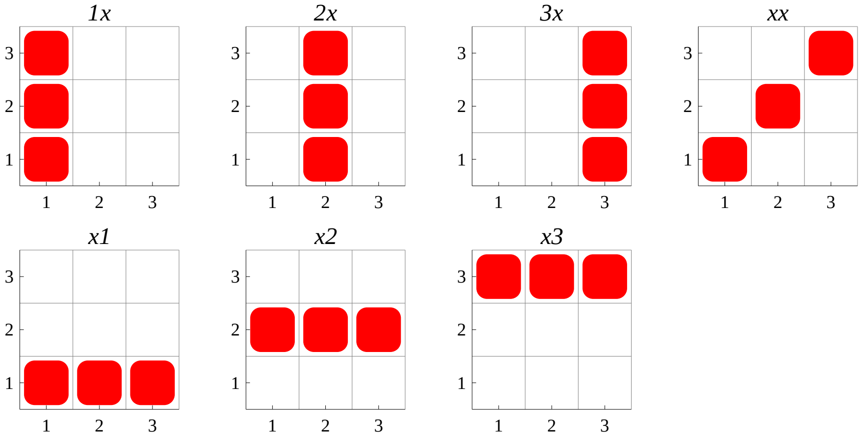
Notationen und Definitionen

Notation: für $k \in \mathbb{N}$: $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$
Def.: Eine kombinatorische Gerade in $[k]^n$ ist eine Teilmenge der Form

$$\{w(i) | i = 1, \ldots, k\} \subset [k]^n \text{ mit } w \in ([k] \cup \{x\})^n - [k]^n.$$

und $w(i) \in [k]^n$ ist das Wort, das entsteht, wenn wir x durch $i \in [k]$ ersetzen.

Kombinatorische Geraden in $[3]^2$



HJ und DHJ

Theorem (Hales-Jewett Theorem (Hales, Jewett 63'))

Für $k, r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass es für alle $n > N$ und jede r-Färbung von $[k]^n$ eine einfarbige kombinatorische Gerade gibt.

Theorem (Density Hales-Jewett Theorem (Furstenberg, Katznelson 91'))

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ gibt es ein N, so dass es für alle $n > N$ und alle Teilmengen $A \subset [k]^n$ mit $|A| > \delta k^n$ eine kombinatorische Gerade in A gibt.

van der Waerden und Szemerédi

Theorem (van der Waerden)

Für alle $k, r \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für es jede r-Färbung von $[N]$ eine einfarbige arithmetische Progession der Länge k gibt.

Theorem (Szemerédi)

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass es für alle $A \subset [N]$ mit $|A| > \delta N$ eine arithmetische Progression der Länge k in A gibt.

Szemerédi und Density Hales-Jewett

$$\begin{array}{ccc} \text{van der Waerden} & \Leftarrow & \text{Szemerédi} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{Hales-Jewett} & \Leftarrow & \text{Density Hales-Jewett} \end{array}$$

Um $HJ \Rightarrow vdW$ bzw. $DHJ \Rightarrow Sz$ zu sehen setzen wir vorübergehend $[k] = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ und betrachten:

$$\begin{array}{ccc} [k]^n & \xrightarrow{1:1} & [k^n] \\ (a_0, \ldots, a_{n-1}) & \mapsto & a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_{n-1} k^{n-1} \end{array}$$

Unter dieser Abbildung werden aus kombinatorischen Geraden arithmetische Progressionen.

Motivation für einen neuen Beweis

- elementaren Beweis ohne die Verwendung von Ergodentheorie
- “echt neuer” Beweis
- DHJ $\Rightarrow$ Szemerédi (einfachster Beweis von Szemerédi)
- neuer Beweis gibt explizite Schranken

Entstehung des neuen Beweises

Polymath Projekt auf Gowers Blog:

27.01.2009:	Is massively collaborative mathematics possible? (128 Responses)
	A combinatorial approach to density Hales-Jewett (>1000 Responses)
10.03.2009:	Problem solved (probably)
20.10.2009:	Arxiv:
	D.J.H. Polymath:
	A new proof of the density Hales-Jewett theorem

DHJ_2 und der Satz von Sperner

Theorem (DHJ_2)

Für alle $\delta > 0$ gibt es ein N, so dass für es alle $n > N$ und alle Teilmengen $A \subset [2]^n$ mit $|A| > \delta 2^n$ eine kombinatorische Gerade in A gibt.

Wie haben folgende Entsprechungen:

- $x \in [2]^n \longleftrightarrow \{A \subset [n]\}$
- kombinatorische Gerade in $[2]^n \longleftrightarrow A, B \subset [n]$ mit $A \subset B$.

Satz von Sperner I

Theorem (Sperner)

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ ein Teilmengensystem von $[n]$ mit der Eigenschaft, dass zwei verschiedene Elemente aus $\mathcal{A}$ nicht ineinander enthalten sind. Dann gilt

$$|\mathcal{A}| < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Beweis: Für ein Teilmengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([n])$ betrachten wir das equal-slice Maß:

$$\mu_{es}(\mathcal{A}) := \sum_{k=0}^{n} \frac{|\{A \in \mathcal{A} | |A| = k\}|}{\binom{n}{k}}$$

Satz von Sperner II

Für eine Permutation $\pi \in S_n$ betrachten wir

$$U_0 := \emptyset, U_1 := \{\pi(1)\}, U_2 := \{\pi(1), \pi(2)\}, \dots,$$
$$U_n := \{\pi(1), \dots, \pi(n)\} = [n]$$

Der Erwartungswert von $|\{i | U_i \in \mathcal{A}\}|$ ist gleich:

$$\mu_{es}(\mathcal{A}) := \sum_{k=0}^{n} \frac{|\{A \in \mathcal{A} | |A| = k\}|}{\binom{n}{k}}$$

Da aber $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n$ gilt, folgt für ein $\mathcal{A}$ wie im Theorem

$$|\{i | U_i \in \mathcal{A}\}| \leq 1.$$

Es folgt also $\mu_{es}(\mathcal{A}) \leq 1$ und somit $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. □

Das Eckentheorem

Theorem (d-dimensionaler Szemerédi)

Für jede endliche Teilmenge $H \in \mathbb{Z}^d$ und jedes $\delta > 0$ gibt es ein N, so dass jede Teilmenge $A \subset [N]^d$ mit $|A| > \delta N^d$ eine Teilmenge der Form $aH + b$ mit $a > 0$.

Für $d = 2$ und $H := \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ ergibt sich:

Theorem (Eckentheorem)

Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein N, so dass jede Teilmenge $A \subset [N]^2$ der Dichte δ ein Tripel der Form $\{(x,y),(x+d,y),(x,y+d)\}$ mit $d > 0$ enhält.

Ajtai Szemerédi Strategie für das Eckentheorem I

Die Dichte-Zuwachs Strategie: Man möchte zeigen, dass eine Teilmenge $A \subset S$ mit Dichte δ einer mathematischen Struktur S eine Teilmenge von einem ganz bestimmten Typ X hat. Zeige:

> *Falls A keine Teilmenge vom Typ X hat, so gibt es eine "gute" Unterstruktur $S' \subset S$, in der A der Dichte $\delta + c$ hat, mit einem $c > 0$ welches nur von δ abhängt.*

Eine Iteration dieses Schrittes führt dann zum Widerspruch.
Sprechweise:
$A \subset [N]^2$ heisst dicht, falls seine Dichte δ durch eine echt positive Konstante unabhängig von N nach unten beschränkt ist.

Ajtai Szemerédi Strategie für das Eckentheorem II

Es sei $A \subset [N]^2$ eine Teilmenge mit $|A| > \delta N^2$ ohne Ecke.

1. **Finde eine dichte Diagonale**
   Es gibt eine Diagonale $\{(x, y)|x + y = t\}$, die mindestens $\delta N/2$ Punkte von A enthält.
2. **Eine dichte Teilmenge der Form $X \times Y \subset [N]^2$ disjunkt von A**
   Es seien $(x_1, y_1), \dots (x_{2m}, y_{2m})$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2m}$ die Punkte der dichten Diagonalen. Wir setzen $X := \{x_1, \dots, x_m\}$ und $Y := \{y_{m+1}, \dots, y_{2m}\}$. Es gilt $X \times Y \cap A = \emptyset$

Ajtai Szemerédi Strategie für das Eckentheorem III

3. **Eine Teilmenge der Form $U \times V$, in der A erhöhte Dichte hat**
   $[N]^2 = X \times Y \cup X \times Y^c \cup X^c \times Y \cup X^c \times Y^c$
   $\Rightarrow$ Es gibt eine Teilmenge $U \times V$ mit Dichte $\delta + \delta^3/48$.
4. **Dichte Teilmengen der Form $U \times V$ können beliebig weit in Gitter zerlegt werden.**
   Eine “gute” Unterstruktur von $[N]^2$ ist eine Teilmenge $P \times Q$, wobei P eine arithmetische Progression ist und Q eine Translation von P ist. Durch wiederholte Anwendung von Szemerédi kann man bis auf eine Teilmenge beliebig kleiner Dichte (durch Vergrößern von N) die Menge $U \times V$ disjunkt in Teilmengen der obigen Form $P \times Q$ zerlegen.

Ajtai Szemerédi Strategie für das Eckentheorem IV

5. **Dichte Zuwachs auf einem Gitter**
   Wir haben also eine Teilmenge von $[N]^2$ der obigen Form $P \times Q$ gefunden in der A die Dichte $\delta + \delta^3/100$ hat.

$\square$

Beweisstrategie für DHJ_3 I

Theorem (Density Hales-Jewett Theorem für $k = 3$)

Für alle $\delta > 0$ gibt es ein N, so dass es für alle $n > N$ und alle Teilmengen $A \subset [3]^n$ mit $|A| > \delta 3^n$ eine kombinatorische Gerade in A gibt.

Motivierende Parallelen:

$$[N]^2 \xrightarrow{1:1} \{(x, y, z) \text{ mit } x + y + z = 2N + 1\}$$

$$[3]^n \xrightarrow{1:1} \{(X, Y, Z) \text{ mit } X \dot\cup Y \dot\cup Z = [n]\}$$

Beweisstrategie für DHJ_3 II

Ecken in $[N]^2$ und kombinatorische Geraden in $[3]^n$

$$\{(x+u,y,z),(x,y+u,z),(x,y,z+u) | \\ x+y+z+u = 2N+1, u \neq 0\} \subset [N]^2$$

$$\{(X \cup U, Y, Z),(X, Y \cup U, Z),(X, Y, Z \cup U) | \\ X \dot\cup Y \dot\cup Z \dot\cup U = [n], U \neq \emptyset\} \subset [3]^n$$

Diagonalen
Diagonale in $[N]^2$: $\{(x,y,z) | x+y=t\}$ für ein $t \in [N]$.
Diagonale in $[3]^n$: $\{(X,Y,Z) | X \cup Y = T\}$ für ein $T \subset [n]$.

Beweisstrategie für DHJ_3 III

Was sind Teilmengen der Form $X \times Y \subset [N]^2$ in $[3]^n$?

$$X \times Y = X \times [N] \cap [N] \times Y \text{ in } [N]^2$$

und

$$X \times [N] = \{(x, y, z) | x \in X\}$$

Für $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}([n])$ betrachten wir $\{(X, Y, Z) | X \in \mathcal{X}\}$
Und für $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{P}([n])$ definieren wir

$$\mathcal{X} \boxtimes \mathcal{Y} := \{(X, Y, Z) | X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y} \text{ mit } X \cap Y = \emptyset\}$$

Beweisstrategie für DHJ_3 IV

Jetzt kann man im wesentlichen die Strategie von Ajtai-Szemerédi verwenden:
Dichte-Zuwachs Strategie:
Wir starten also mit einer Menge $A \subset [3]^n$ der Dichte δ, die keine kombinatorische Gerade enthält.

1. **Finde eine dichte Diagonale**
   $[3]^n$ zerlegt sich disjunkt in die Diagonalen $\{(X, Y, Z) | X \dot\cup Y = T\}$ mit $T \subset [n]$.
   Also findet man eine dichte Diagonale.

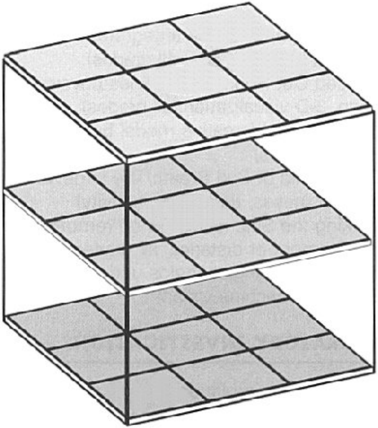
Beweisstrategie für DHJ_3 V

2. **Eine dichte Menge der Form $\mathcal{X} \boxtimes \mathcal{Y}$ disjunkt von A**
   Dies funktioniert nur in einem Unterraum von $[3]^n$.
3. **Eine Menge der Form $\mathcal{X} \boxtimes \mathcal{Y}$ in der A erhöhte Dichte hat.**
   Klappt in etwas abgeänderter Form, wenn man das ein equal slice Maß auf $[3]^n$ verwendet.

Beweisstrategie für DHJ_3 VI

4. **Dichte Mengen der Form $\mathcal{X} \boxtimes \mathcal{Y}$ können fast vollständig in kombinatorische Unterräume zerlegt werden.**
   "Gute" Unterstrukturen sind jetzt kombinatorische Teilräume. Dieser Schritt verwendet nun statt Szemerédi eine multidimensionale Version von DHJ_2.
5. **Dichte Zuwachs auf einem kombinatorischen Teilraum**
   Jetzt kann das Dichte-Zuwachs Argument iteriert angewendet werden. □

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Density Hales-Jewett Zahlen

$c_{n,3} :=$ maximale Mächtigkeit einer Teilmenge von $[3]^n$, die keine kombinatorische Gerade enthält.
$c'_{n,3} :=$ maximale Mächtigkeit einer Teilmenge von $[3]^n$, die keine geometrische Gerade enthält (Moser Zahlen)

n	$c_{n,3}$	$c'_{n,3}$
0	1	1
1	2	2
2	6	6
3	18	16
4	52	43
5	150	124
6	450	353

Explizite Schranken

Turm Funktion:

$$T(1) := 2, T(n) := 2^{T(n-1)}$$

zum Beispiel $T(4) = 2^{2^{2^{2}}}$

Dann ist eine mögliche Wahl: $DHJ_3(\delta) = T(\mathcal{O}(1/\delta^2))$

Ackermann Funktion

$$A_1(n) := 2n, A_k(1) := 2, A_k(n) := A_{k-1}(A_k(n-1))$$

z.B. $A_2(n) = 2^n$ und $A_3(n) = T(n)$
$DHJ_k(\delta) \approx A_k(A_{k-1}(1/\delta))$