Der Darstellungsring einer kompakten Lie-Gruppe

Wolfgang Steimle*

8. Februar 2006

Sei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe, T ein maximaler Torus von G, θ_j ($j \in \{1, \ldots, m\}$) die Wurzeln mit $\theta_i \neq -\theta_j$ und W die Weyl-Gruppe.

Hauptreferenz dieses Vortrags ist das Buch "Lectures on Lie Groups" von Adams; im Text sind die Nummerierungen der entsprechenden Resultate in diesem Buch vermerkt.

Definition 1 (6.2). — Die Aktion von W auf T induziert eine isometrische Aktion von W auf $L(T)$. Für $w \in W$ sei $\operatorname{sgn} w$ das Vorzeichen der Determinante der Aktion von w auf $L(T)$.

Definition 2 (6.2). — Die Aktion von W auf dem Darstellungsring $K(T)$ ist gegeben durch $w \cdot \chi := \chi \circ w^{-1}$. Seien

$$\begin{aligned} K(T)^W &:= \{\chi \in K(T);\ w \cdot \chi = \chi\ \forall w \in W\}, \\ K(T)^{-W} &:= \{\chi \in K(T);\ w \cdot \chi = \operatorname{sgn} w \cdot \chi\ \forall w \in W\} \end{aligned}$$

der Ring der *symmetrischen Charaktere* bzw. die additive Gruppe der *antisymmetrischen* oder *alternierenden Charaktere*.

Das Ziel dieses Vortrags ist der folgende Satz:

Theorem 3 (6.20). — *Die Restriktion*

$$K(G) \xrightarrow{\cong} K(T)^W$$

ist ein Ringisomorphismus.

Erinnerung: Die Einschränkung der adjungierten Darstellung von G auf T liefert eine Darstellung von T, die wie folgt zerfällt:

$$L(G) = L(T) \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$$

mit (reell) zweidimensionalen irreduziblen Darstellungen V_j, wobei T auf V_j durch Multiplikation mit

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta_j(t) & \sin 2\pi\theta_j(t) \\ -\sin 2\pi\theta_j(t) & \cos 2\pi\theta_j(t) \end{pmatrix}$$

*steimle@math.uni-muenster.de

wirkt.

Für $w \in W$ sind die Darstellungen $\mathrm{Ad}|_\mathrm{T} : T \to L(G)$ und $\mathrm{Ad}|_\mathrm{T} \circ w : T \to L(G)$ isomorph. Der T-Isomorphismus lässt sich explizit angeben: Ist $w \in W$ gegeben durch Konjugation mit $x \in N(T)$, so ist er einfach die Tangentialabbildung $L(G) \longrightarrow L(G)$ der Konjugation mit x. Damit permutiert die Konjugation mit $x \in N(T)$ die irreduziblen Darstellungen V_j (eventuell unter Umkehrung der Orientierung).

Damit permutiert W aber auch die Wurzeln von G: Falls die Konjugation mit $x \in N(T)$ die V_j auf V_i orientierungserhaltend/-umkehrend abbildet, so folgt daraus $\theta_j \circ w = \theta_i$ bzw. $\theta_j \circ w = -\theta_i$.

Zum Beispiel gilt:

Proposition 4 (6.3). — *Falls $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(n)$ zu $\mathrm{Spin}(n)$ liftet, so ist*

$$\delta(t) = \prod_{j=1}^{m} (e^{\pi i \theta_j(t)} - e^{-\pi i \theta_j(t)}) \tag{1}$$

ein antisymmetrischer Charakter von T.

Beweis. Es gilt

$$\delta = \sum \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \operatorname{Exp} \pi i(\varepsilon_1\theta_1 + \cdots + \varepsilon_m\theta_m),$$

wobei die Summe über alle Vorzeichen $\varepsilon_i = \pm 1$ läuft. Nach 5.57 ist

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1\theta_1 + \cdots + \varepsilon_m\theta_m)$$

ein Gewicht, sodass δ ein Charakter ist.

Sei nun $w \in W$ gegeben durch Konjugation mit $x \in N(T)$ und sei $\phi : L(G) \to L(G)$ deren Tangentialabbildung. Nun ist $\phi = \operatorname{Ad} x$ orientierungerhaltend, da $\mathrm{Ad}(1) = \mathrm{id}_{L(G)}$ orientierungserhaltend und G wegzusammenhängend ist. Wir zerlegen wieder $L(G) = L(T) \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ wie oben. Sei ν die Anzahl der Teilräume V_j, auf denen ϕ die Orientierung umkehrt. Damit gilt

$$\det \phi|_{V_1 \oplus \cdots \oplus V_m} = (-1)^\nu.$$

Auf $L(T)$ gilt nach Definition

$$\det \phi|_{L(T)} = \operatorname{sgn} w.$$

Es folgt

$$(-1)^\nu = \operatorname{sgn} w,$$

und die Antisymmetrie von δ folgt mit der Identität $w \cdot \delta = (-1)^\nu \cdot \delta$, die man aus (1) erkennt. □

Die Bedeutung von δ kommt aus dem folgenden Satz, der die Integration von Klassenfunktionen auf G auf eine Integration auf T reduziert:

Theorem 5 (6.1, Weyls Integralformel). — *Für alle Klassenfunktionen $f : G \to \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_{g \in G} f(g) = \frac{1}{|W|} \int_{t \in T} f(t)\delta(t)\overline{\delta(t)}$$

mit $\delta(t)$ aus (1).

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi:\ G/T\times T &\longrightarrow G,\\ (\bar{g},t) &\longmapsto gtg^{-1}\end{aligned}$$

Nach 5.53 faktorisiert ϕ über $G/T \times_W T$:[1]

$$\begin{tikzcd} G/T\times T \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "\phi"'] & G/T\times_W T \arrow[d, "c"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Die Abbildung b ist eine $|W|$-fache Überlagerung, hat also Abbildungsgrad $|W|$, und c hat Abbildungsgrad 1, da die Einschränkung $G/T \times_W T_R \to G_R$ auf die regulären Punkte ein Homöomorphismus und G zusammenhängend ist. Somit hat ϕ Abbildungsgrad $|W|$, und es gilt

$$|W|\int_G f\,dg = \int_{G/T\times T} f^*\,dg^*,$$

wobei $f^* = f\circ\phi$ und dg^* das zurückgezogene Maß von G auf $G/T\times T$ ist.

Nun genügt es, die Identität

$$dg^* = (\delta(t)\overline{\delta(t)})\,d(gH,t) \tag{2}$$

zu zeigen. Tatsächlich folgt aus (2) die Aussage des Satzes, denn für eine Klassenfunktion f auf G ist $f^* = f\circ\phi:\ G/T\times T\to\mathbb{R}$ konstant entlang G/T, und die Integration über G/T liefert den Faktor 1.

Um (2) zu zeigen, bezeichne mit L_g bzw. R_g die Links- bzw. die Rechtstranslation um g auf G. Nach der Transformationsformel gilt (nach Wahl von lokalen Koordinaten) $dg^* = (\det D\phi)\cdot d(gH,t)$. Zur Berechnung von $D\phi$ lasse zunächst die erste Variable fest und betrachte für $g\in G$ die Abbildung

$$\phi_g:\ T\longrightarrow G,\quad \tau\mapsto g\tau g^{-1}.$$

Nach Definition gilt an der Stelle 1 für das Differential $D\phi_g(1) = \operatorname{Ad} g$. Um das Differential an der Stelle $t\in T$ zu erhalten, betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} (T,t) \arrow[r, "\phi_g"] \arrow[d, "L_t"'] & (G, gtg^{-1}) \\ (T,1) \arrow[r, "\phi_g"] & (G,1) \arrow[u, "L_{g^{-1}t^{-1}g}"'] \end{tikzcd}$$

Rechnet man in linksinvarianten Koordinaten, erhält man für jede Linkstranslation $DL_g = \mathbf{1}$, sodass Linkstranslationen nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Somit gilt an jeder Stelle $t\in T$

$$D\phi_g(t) = \operatorname{Ad} g.$$

[1] Ist $w\in W$ gegeben durch die Konjugation mit $n\in N(T)$, so setze $w\cdot gT := gTn^{-1} = gn^{-1}T$. Somit wirkt W diagonal auf $G/T\times T$; der zugehörige Orbitraum sei $G/T\times_W T$.

Betrachte nun für $t \in T$ die Abbildung

$$\phi^t : G \longrightarrow G, \quad \gamma \mapsto \gamma t \gamma^{-1}.$$

Die Abbildung ϕ^t an der Stelle $g \in G$ lässt sich schreiben als Komposition

$$(G,g) \xrightarrow{(\mathrm{id},\iota)} (G \times G, (g, g^{-1})) \xrightarrow{\mathrm{id} \times L_t} (G \times G, (g, tg^{-1})) \xrightarrow{\mu} (G, gtg^{-1}) \ ,$$

wobei $\iota : G \longrightarrow G$ die Inversion und $\mu : G \times G \longrightarrow G$ die Gruppenmultiplikation bezeichnet. Offensichtlich gilt an der Stelle $(g, g') \in G \times G$

$$D\mu(g, g') = (DR_{g'} | DL_g)$$

als Matrix. Weiter gilt auf Grund der Beziehung

$$\exp(-X) = \iota(\exp(X))$$

für das Differential von ι die Identität $D\iota(1) = -\operatorname{id}_{L(G)}$, und zur Berechnung von $D\iota$ an einer beliebigen Stelle $g \in G$ betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (G,g) & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & (G, g^{-1}) \\ {\scriptstyle L_{g^{-1}}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle R_{g^{-1}}} \\ (G,1) & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & (G,1) \end{array}$$

Aus dem Diagramm folgt

$$D\iota(g) = -\operatorname{Ad} g^{-1}.$$

Insgesamt überzeugt man sich so von der Beziehung

$$D\phi^t(g) = \operatorname{Ad} g \cdot (\operatorname{Ad} t^{-1} - \operatorname{id}_{L(G)}).$$

Der Tangentialraum von G/T an der Stelle $[T] \in G/T$ lässt sich identifizieren mit einem Komplement von $L(T)$ in $L(G)$. Wähle dazu das T-stabile Komplement unter der adjungierten Darstellung von T auf $L(G)$. Dann erhält man in Matrixnotation

$$D\phi(\bar{g}, t) = \operatorname{Ad} g \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Ad} t^{-1} - \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Sodann folgt mit $\det \operatorname{Ad} g = 1$ die Identität

$$\begin{aligned} \det D\phi(\bar{g}, t) &= \det(\operatorname{Ad} t^{-1} - \mathbf{1}) \\ &= \prod_{j=1}^{r} \left| e^{2\pi i \theta_j} - 1 \right|^2 \\ &= \prod_{j=1}^{r} \left| e^{\pi i \theta_j} - e^{-\pi i \theta_j} \right|^2 \\ &= \delta(t)\ \overline{\delta(t)}. \end{aligned}$$

□

Wir bezeichnen im Folgenden

$$U_r := \{t \in T;\ \theta_r(t) \equiv 0 \bmod 1\}.$$

Das nächste Lemma verknüpft die Eigenschaft eines Charakters, auf U_r zu verschwinden, mit einer Teilbarkeitseigenschaft in $K(T)$.

Lemma 6. — *(i) Sei χ ein Charakter von T, der auf U_r verschwindet. Dann ist χ in $K(T)$ durch* $\mathrm{Exp}(2\pi i\theta_r) - 1$ *teilbar.*

(ii) Jeder alternierende Charakter χ ist in $K(T)$ durch $\prod_{j=1}^{m} (\mathrm{Exp}(2\pi i\theta_r) - 1)$ *teilbar.*

Beweis. (i) Wir wissen, dass U_r aus genau einer oder zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Sei zunächst der erste Fall gegeben. In diesem Fall existiert ein Punkt $e_1 \in L(T)$ auf dem Ganzzahlgitter mit $\theta_r(e_1) = 1$. Ergänze diesen Vektor durch eine $\mathbb{Z}$-Basis $e_2, \ldots, e_k$ des Ganzzahlgitters von $L(U_r)$ zu einer Basis des Ganzzahlgitters von $L(T)$. Die duale Basis zu dieser Basis definiert Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und somit komplex eindimensionale Darstellungen $\xi_j = \mathrm{Exp}\, 2\pi i\alpha_j$ ($j \in \{1, \ldots, k\}$) von T. Nach Konstruktion ist dabei $\alpha_1 = \theta_r$, d. h.

$$\xi_1 = \mathrm{Exp}\, 2\pi i\theta_r.$$

3.77 besagt, dass der Darstellungsring $K(T)$ der Ring der endlichen Laurentreihen in $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ist. Demnach gibt es in $K(T)$ eine Gleichung

$$\chi = \sum_n c_n \xi_1^n$$

mit endlichen Laurentreihen c_n in $\xi_2, \ldots, \xi_k$, wobei nur endlich viele c_n ungleich 0 sind. Auf U_r nimmt dabei $\xi_1 = \mathrm{Exp}\, 2\pi i\theta_r$ den Wert 1 an, während χ nach Voraussetzung verschwindet. Damit verschwindet auf U_r die Summe $\sum_n c_n$ identisch. Daraus folgt bereits, dass $\sum_n c_n$ die Nullreihe ist, denn die Variablen $\xi_2, \ldots, \xi_k$ sind nach Konstruktion auf U_r algebraisch unabhängig. Somit ist Laurentreihe

$$\psi := \sum_n \Big(\sum_{j \geq n} c_j \Big) \xi_1^{n-1}$$

endlich, und man erhält in $K(T)$ die Identität

$$\chi = \xi_1 \cdot \psi - \psi$$

wie gewünscht.

Nehmen wir nun an, dass U_r aus zwei Komponenten besteht. Dann gibt es einen Punkt $e_1 \in L(T)$ auf dem Ganzzahlgitter mit $\theta_r(e_1) = 2$. Ergänze diesen wieder zu einer $\mathbb{Z}$-Basis des Ganzzahlgitters wie oben und betrachte dazu die Darstellungen $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Nun gilt die Beziehung

$$\mathrm{Exp}(2\pi i\theta_r) = \xi_1^2,$$

und U_r besteht aus den beiden Komponenten $\xi_1 = 1$ und $\xi_1 = -1$. Wieder lässt sich χ folgendermaßen schreiben: $\chi = \sum_n c_n \xi_1^n$. Durch Wertevergleich auf der durch $\xi_1 = 1$ gegebenen Komponenten erhält man wieder $\sum_n c_n = 0$ und

$$\chi = (\xi_1 - 1) \cdot \bar{\psi}$$

Mit einem Charakter $\bar{\psi}$. Weiter ist nun jedoch $\bar{\psi}$ ein Charakter, der auf der durch $\xi_1 = -1$ gegebene Komponente verschwindet. Wir nutzen denselben Ansatz

$$\bar{\psi} = \sum_n \bar{c}_n \xi_1^n$$

wie oben mit endlichen Laurentreihen $\bar{c}_n$ in $\xi_2, \ldots, \xi_k$ und endlich vielen Koeffizienten und vergleichen nun die Werte auf der durch $\xi_1 = -1$ gegebenen Komponente. Man erhält die Identität

$$\sum_n (-1)^n c_n = 0.$$

Damit ist die Laurentreihe

$$\psi := \sum_n \Big(\sum_{k \geq n} (-1)^{k+n} c_k \Big) \xi_1^{n-1}$$

endlich und erfüllt

$$\bar{\psi} = (\xi_1 + 1) \cdot \psi.$$

Somit gilt

$$\chi = (\xi_1^2 - 1) \cdot \psi.$$

mit einem $\psi \in K(T)$ wie verlangt.

(ii) Jeder antisymmetrische Charakter verschwindet auf allen U_r. Wende zunächst (i) an mit $r = 1$. Man erhält eine Darstellung

$$\chi = \big(\mathrm{Exp}(2\pi i \theta_1) - 1\big) \cdot \psi,$$

und man sieht ein, dass der Charakter ψ immer noch auf allen U_r mit $r > 1$ verschwindet, denn auf $U_r \cap U_1^c$ ist dies klar, und aus Dimensionsgründen ist dies eine dichte Teilmenge von U_r. Induktiv folgt die Behauptung. $\square$

Als Folgerung aus diesem Lemma erhält man:

Proposition 7 (6.6). — *Die adjungierte Darstellung* $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(n)$ *lifte zu* $\mathrm{Spin}(n)$. *Dann gilt:*

$$K(T)^{-W} = K(T)^W \cdot \delta.$$

Mit anderen Worten definiert die Multiplikation mit δ *einen Gruppenisomorphismus* $K(T)^W \to K(T)^{-W}$.

Beweis. Aus (ii) des vorigen Lemmas folgt, dass es für einen alternierenden Charakter χ einen Charakter ψ von T gibt mit $\chi = \psi \cdot \delta$. Dabei ist ψ symmetrisch. Tatsächlich gilt nämlich für jedes $\phi \in W$ wegen der Antisymmetrie von δ

$$(\operatorname{sgn} \phi) \cdot \psi\delta = \phi \cdot (\psi\delta) = (\operatorname{sgn} \phi) \cdot (\phi\psi) \cdot \delta;$$

Division durch $\operatorname{sgn} \phi \cdot \delta$ liefert die zu zeigende Identität $\phi\psi = \psi$ auf dem Komplement von

$$\{t \in T;\ \delta(t) = 0\} = \bigcup_r U_r.$$

Dieses Komplement ist jedoch eine dichte Teilmenge von T; aus Stetigkeitsgründen folgt die Symmetrie von ψ und somit die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ist eine direkte Konsequenz der ersten unter Berücksichtigung der Nullteilerfreiheit von $K(T)$. $\square$

Definition 8 (6.7, 6.12). — Sei $h \in L(T)^*$ ein Gewicht. Die *elementare symmetrische Summe* $S(h)$ und die *elementare antisymmetrische Summe* $A(h)$ sind symmetrische bzw. alternierende Charaktere, gegeben durch die Gleichungen

$$S(h) = \sum_{w \in W \cdot h} \operatorname{Exp} 2\pi i w$$
$$A(h) = \sum_{\phi \in W} \operatorname{sgn} \phi \cdot \operatorname{Exp} 2\pi i(\phi h).$$

Wir fassen einige einfache Eigenschaften der elementaren symmetrischen und alternierende Summen zusammen:

Bemerkung 9. — (i) Sei M eine Menge von Repräsentanten der W-Orbits von $K(T)$ (z. B. die Gewichte im Abschluss der FDWK). Dann ist $(S(h))_{h \in M}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $K(T)^W$.

(ii) Ist $h \in L(T)^*$ ein singuläres Gewicht, d. h. gilt $h \in L(U_r)^*$ für ein r, so ist $A(h) = 0$. Andernfalls besteht die Summe aus $|W|$ verschiedenen Termen.

(iii) Sei N eine Menge von Repräsentanten der W-Orbits von regulären Gewichten (z. B. die Gewichte in der FDWK). Dann ist $(A(h))_{h \in N}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $K(T)^{-W}$.

(iv) Sind A_1, A_2 zwei elementare alternierende Summen $\neq 0$, so gilt die folgende Orthogonalitätsrelation:

$$\int_T \overline{A_1} A_2 = \begin{cases} |W|, & \text{falls } A_1 = A_2, \\ -|W|, & \text{falls } A_1 = -A_2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zusammen mit (iii) heißt das: Die nichttrivialen elementaren alternierenden Summen bilden eine $\mathbb{Z}$-Orthonormalbasis von $K(T)^{-W}$ unter dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle' := \frac{1}{|W|} \int_T f \bar{g}.$$

(v) Ein Element $A \in K(T)^{-W}$ ist eine elementare antisymmetrische Summe genau dann, wenn

$$\langle A, A \rangle' = \frac{1}{|W|} \int_T A \bar{A} = 1.$$

Tatsächlich besteht wegen (iii) eine Beziehung $A = \sum_i n_i A_i$ mit ganzen Zahlen n_i und nichttrivialen elementaren alternierenden Summen A_i. Mit (iv) folgt die Aussage von (v).

Im Folgenden sei wieder vorausgesetzt, dass $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(n)$ zu $\mathrm{Spin}(n)$ liftet. Wir betrachten nun die folgende Verkettung:

$$\kappa : K(G) \longrightarrow K(T)^W \xrightarrow{\cdot\,\delta} K(T)^{-W}, \tag{3}$$

wobei der erste Pfeil die Einschränkung und der zweite die Multiplikation mit δ darstellt. Wir wissen bereits, dass der rechte Homomorphismus bijektiv ist.

Bemerkung 10. — Weyls Integralformel besagt, dass

$$\kappa:\ \big(K(G),\ \langle\,,\rangle\big) \longrightarrow \big(K(T)^{-W},\ \langle\,,\rangle'\big)$$

isometrisch ist. Insbesondere ist κ injektiv.

Die Injektivität von κ folgt im Übrigen auch aus einem früheren Resultat: 4.31 besagt, dass die Einschränkung eine Bijektion

$$K_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \mathcal{C}(T)^W \tag{4}$$

zwischen Klassenfunktionen auf G und stetigen W-invarianten Funktionen auf T liefert.

Proposition 11 (6.19). — *Die adjungierte Darstellung $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(n)$ lifte zu $\mathrm{Spin}(n)$. Dann definiert die Abbildung κ aus (3) eine 1:1-Korrespondenz zwischen irreduziblen Darstellungen von G und elementaren alternierenden Summen in $K(T)$. Insbesondere ist*

$$K(G) \xrightarrow{\cong} K(T)^W$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Aus obigen Bemerkungen folgt, dass die Bilder der irreduziblen Darstellungen von G in $K(T)^{-W}$ elementare Summen sind, da sie unter dem Skalarprodukt $\langle\,,\rangle'$ gerade die Norm 1 haben.

Es bleibt die Surjektivität der behaupteten Korrespondenz zu zeigen. Sei dazu $A(h)$ eine elementare alternierende Summe. Da der rechte Morphismus von κ ein Epimorphismus ist, ist $A(h) = \sigma\delta$ für einen symmetrischen Charakter σ in $K(T)$. Andererseits gilt mit der Bijektion (4), dass σ die Einschränkung einer Klassenfunktion $f \in K_{\mathbb{C}}(G)$ ist. Nun folgt aus dem Peter-Weyl-Theorem, dass es eine irreduzible komplexe Darstellung von G mit Charakter χ gibt, sodass

$$\int_G \bar{\chi} f = \langle \chi, f\rangle > 0.$$

Nun ist nach dem ersten Teil des Beweises $\kappa(\chi)$ eine elementare alternierende Summe; es folgt $\kappa(\chi) = A(h)$ wegen $\langle \chi, f\rangle = \langle \kappa(\chi), A(h)\rangle'$ und der Orthogonalitätsrelation für elementare alternierende Summen. □

Nun können wir Theorem 3 beweisen.

Beweis von Theorem 3. Falls $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(n)$ zu $\mathrm{Spin}(n)$ liftet, liefert Proposition 11 die Behauptung. Andernfalls existiert eine zweiblättrige Überlagerung $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$ von Lie-Gruppen und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ad}}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr] & \mathrm{Spin}(n) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{SO}(n) \end{tikzcd}$$

sodass die Abbildung $\mathrm{Ad}\circ\pi : \tilde{G} \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ zu $\mathrm{Spin}(n)$ liftet und 6.19 anwendbar ist. Sei also $\psi \in K(T)^W$ ein symmetrischer Charakter. $\psi \circ \pi|_{\tilde{T}}$ ist ein symmetrischer Charakter auf $\tilde{T}$, erweitert sich also zu einem Charakter $\tilde{\chi} \in K(\tilde{G})$.

Gleichzeitig ist ψ eine stetige Funktion, also Einschränkung einer Klassenfunktion χ' auf G. Dann ist $\chi' \in K(G)$ mit dem folgenden Argument: Wegen

$$\chi' \circ \pi|_{\tilde{T}} = \tilde{\chi}|_{\tilde{T}},$$

gilt auch $\chi' \circ \pi = \tilde{\chi}$, denn die Restriktionsabbildung $K(\tilde{G}) \longrightarrow K(\tilde{T})^W$ ist injektiv. Das bedeutet, dass der Charakter $\tilde{\chi}$ als stetige Funktion über π faktorisiert. Nach 3.68 ist dann aber χ' bereits ein (virtueller) Charakter.

Damit ist die Surjektivität von $K(G) \longrightarrow K(T)^W$ gezeigt. Die Injektivität folgt wieder direkt aus der Injektivität in (4). $\square$

Mit Hilfe von Theorem 3 kann man den Darstellungsring einer kompakten Lie-Gruppe berechnen, indem man den (bereits bekannten) Darstellungsring des maximalen Torus und die Aktion der Weyl-Gruppe betrachtet. Als Beispiel sei ohne Beweis genannt:

Theorem 12 (6.41). — *Sei G eine kompakte zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe. Dann ist der Darstellungsring von G ein Polynomring:*

$$K(G) \cong \mathbb{Z}[\rho_1, \ldots, \rho_k].$$