EIGENSCHAFTEN MAXIMALER TORI

MARKUS KEPPELER

Zusammenfassung. Dies ist die Ausarbeitung eines Seminarvortrages zum Thema „Eigenschaften maximaler Tori“, der an der Universität Münster gehalten wurde. Die Ausarbeitung basiert auf dem Buch „Lectures on Lie Groups“ von J. Frank Adams[1] und bezieht sich auf die Seiten 89-100. Im Wesentlichen geht es um folgende Themen:

- *Grundlegende Eigenschaften maximaler Tori*: Jedes Element einer kompakten, zusammenhängenden Lie-Gruppe ist in einem maximalen Torus dieser Gruppe enthalten, zwei maximale Tori sind immer konjugiert, ein maximaler Torus ist immer auch eine maximale abelsche Untergruppe.
- Definition der *Weyl-Gruppe*, direkte Folgerungen daraus.
- *Reguläre* und *singuläre* Elemente einer kompakten, zusammenhängenden Lie-Gruppe.

Bemerkung (4.5)**.** Im Folgenden bezeichne G immer eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe.

Satz (4.21)**.** Sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Dann ist jedes Element aus G enthalten in einem Konjugierten von T.

Beweis. Sei $g \in G$. Wir wollen zeigen das ein $x \in G$ mit $g \in xTx^{-1}$ existiert. Betrachte die Linksnebenklassen G/T und sei $f : G/T \to G/T$ die Linksmultiplikation mit g, also $f(xT) = gxT$. Ein Fixpunkt von f ist dann eine Nebenklasse xT mit $gxT = xT$, d.h. $g \in xTx^{-1}$. Wir müssen also nur zeigen, dass f einen Fixpunkt hat. Dazu werden wir eine Form von des Lefschetzschen Fixpunktsatzes benutzen, die von A. Dold angegeben wurde.

Fassen wir zusammen was wir brauchen: Sei $f : X \to X$ eine stetige Funktion, definiere $\Lambda(f) \in \mathbb{Z}$, indem wir $H^q(f;\mathbb{Q}) : H^q(X;\mathbb{Q}) \to H^q(X;\mathbb{Q})$ nehmen und

$$\Lambda(f) = \sum_q (-1)^q \operatorname{Tr}(H^q(f;\mathbb{Q}))$$

setzen (Lefschetzzahl).

Dann hängt $\Lambda(f)$ nur von der Homotopieklasse von f ab. Der Lefschetzsche Fixpunktsatz besagt nun: Wenn f keine Fixpunkte besitzt gilt $\Lambda(f) = 0$. Wenn f nur isolierte Fixpunkte (und damit eine endliche Anzahl) besitzt, dann ist $\Lambda(f)$ die Anzahl der Fixpunkte (gezählt mit Vielfachheiten), was wie folgt definiert ist:

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und x ein Fixpunkt von f. Betrachte $1 - f' : X_x \to X_x$. Wenn $\det(1 - f') > 0$ gilt, so hat f die Vielfachheit $+1$ an x. Wenn $\det(1 - f') < 0$ gilt, so ist die Vielfachheit -1. Den Fall $\det(1 - f') = 0$ müssen wir nicht diskutieren, da er in unserem Fall nicht auftritt.

Um $\Lambda(f)$ zu berechnen können wir f durch eine homotope Abbildung f_0 ersetzen. Wir können also g durch irgendein anderes $g_0 \in G$ ersetzen, da G wegzusammenhängend ist (zusammenhängende Lie-Gruppe). Wähle ein g_0, welches ein Erzeuger von T ist, und sei f_0 die zugehörige Abbildung. Dann sind die Fixpunkte von f_0 die Nebenklassen nT für $n \in \mathrm{N}(T)$[1] (nachzurechnen).

Date: 6. Januar 2006.

[1]Sei $T \subset G$. Dann ist der *Normalisator* von T in G definiert als $\mathrm{N}(T) := \{x \in G : xT = Tx\}$.

Betrachten wir nun $\mathrm{N}(T)$, dies ist eine abgeschlossene Untergruppe von G und somit eine Lie-Gruppe. Die Zusammenhangskomponente $\mathrm{N}(T)_1$ des neutralen Elementes ist offen in $\mathrm{N}(T)$ und hat damit nur eine endliche Anzahl von Nebenklassen in $\mathrm{N}(T)$. Es gilt $\mathrm{N}(T)_1 = T$, was wir wie folgt sehen: $\mathrm{N}(T)$ agiert auf T durch Konjugation ($n(t) = ntn^{-1}$), und $\mathrm{Aut}(T)$ ist diskret, also agiert $\mathrm{N}(T)_1$ trivial auf T. Wenn $\mathrm{N}(T)_1$ den Torus T echt enthalten würde, so enthält es auch eine Ein-Parameter-Untergruppe, die nicht in T enthalten ist, aber mit T kommutiert, was der Maximalität von T widerspricht (4.9). Also gilt $\mathrm{N}(T)_1 = T$, und T hat nur eine endliche Anzahl von Nebenklassen in $\mathrm{N}(T)$, und damit hat f_0 nur eine endliche Anzahl von Fixpunkten.

Es genügt nur einen von diesen Fixpunkten zu betrachten, T. Denn: Sei nT ein anderer Fixpunkt. Definiere

$$r_n : G/T \to G/T, r_n(gT) = gTn.$$

Dies ist ein wohldefinierter Diffeomorphismus, kommutiert mit f_0 und bildet T auf nT ab. Also ist die Multiplikation auf nT das Gleiche wie auf T. (Man beobachtet, dass f_0 auch als $f_0(xT) = g_0xg_0^{-1}T$ geschrieben werden kann (denn $g_0^{-1}T = T$). Dies bedeutet, dass man f_0 als Quotientenabbildung der Abbildung $G \to G$, $x \mapsto g_0xg_0^{-1}$ erhalten kann. Dies hat den Effekt, dass e auf e abgebildet wird.)

Um eine Basis von $L(G/T)$ zu erhalten, wähle eine Basis für $L(T)$, erweitere sie zu einer Basis von $L(G)$, und entferne die Vektoren von $L(T)$. Dann (4.12, 4.14) hat $1 - f_0'$ die Form

$$\begin{pmatrix} 1-\cos 2\pi\theta_1(g_0) & \sin 2\pi\theta_1(g_0) & 0 \\ -\sin 2\pi\theta_1(g_0) & 1-\cos 2\pi\theta_1(g_0) & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$\det(1-f_0') = \prod_{r=1}^{m} \begin{vmatrix} 1-\cos 2\pi\theta_r(g_0) & \sin 2\pi\theta_r(g_0) \\ -\sin 2\pi\theta_r(g_0) & 1-\cos 2\pi\theta_r(g_0) \end{vmatrix},$$

was größer als 0 ist, solange nicht $\cos 2\pi\theta_r(g_0) = 1$ für gewisse r. Aber es gilt $\theta_r(g_0) \neq 0 \mod 1$, denn θ_r ist eine nichttriviale Funktion auf T (4.12). Also ist die Vielfachheit $+1$, und $\Lambda(f) = |\mathrm{N}(T)/T| > 0$. f hat also mindestens einen Fixpunkt, und der Satz ist bewiesen. □

Korollar (4.22)**.** Jedes Element von G liegt in einem maximalen Torus.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass ein Konjugiertes eines maximalen Torus wieder ein maximaler Torus ist, dann folgt die Behauptung mit 4.21: Sei T ein maximaler Torus, und gTg^{-1} ein Konjugiertes, für das $gTg^{-1} \subset U \subset G$ gilt (U sei Torus). Dann gilt:

$$gTg^{-1} \subset U \Rightarrow T \subset g^{-1}Ug \overset{T \text{ maximal}}{\Rightarrow} T = g^{-1}Ug$$

Es gilt also

$$gTg^{-1} = gg^{-1}Ugg^{-1} = U,$$

und damit ist gTg^{-1} wieder ein maximaler Torus. □

Korollar (4.23)**.** Wenn T und U zwei maximale Tori sind, so sind sie konjugiert.

Beweis. Sei u ein Erzeuger von U (er existiert nach 4.3). Dann gilt $u \in gTg^{-1}$ für ein $g \in G$ (nach 4.21). Folglich gilt auch $U \subset gTg^{-1}$. Da gTg^{-1} aber wieder ein Torus ist, und U ein maximaler Torus ist, gilt $U = gTg^{-1}$, und damit sind U und T Konjugierte. □

Definition (4.24)**.** Nach 4.23 folgt, dass alle maximalen Tori die gleiche Dimension haben. Diese wird der *Rang* von G genannt und im Folgenden mit k bezeichnet.

Satz (4.25)**.** Sei S eine zusammenhängende abelsche Untergruppe von G, und $g \in G$ kommutiere mit allen Elementen von S. Dann existiert ein Torus T, der sowohl g als auch S enthält.

Beweis. Sei H die von g und S erzeugte Untergruppe von G. Diese Untergruppe ist abelsch (S abelsch, g kommutiert mit allen $s \in S$), also ist $\bar{H}$ (der Abschluss von H in G) eine kompakte abelsche Lie-Gruppe (kompakt und abelsch ist klar, Lie-Gruppe nach 2.26, 2.27). Nach 2.20 folgt, dass die Zusammenhangskomponente $(\bar{H})_1$ des neutralen Elementes ein Torus ist. $\bar{H}/(\bar{H})_1$ ist endlich und durch g erzeugt, also gilt $\bar{H}/(\bar{H})_1 \cong \mathbb{Z}/m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Nach 4.4 folgt also, dass $\bar{H}$ einen Erzeuger hat. Sei h ein Erzeuger von $\bar{H}$, h liegt in einem maximalen Torus T (nach 4.22). Es gilt also $g \cup S \subset H \subset \bar{H} \subset T$. □

Satz (4.26)**.** Sei T ein maximaler Torus von G. Wenn A eine abelsche Untergruppe ist, und $T \subset A \subset G$ gilt, so folgt $T = A$. Ein maximaler Torus ist also eine maximale abelsche Untergruppe.

Beweis. Sei $a \in A$. Nach 4.25 folgt dann, dass es einen Torus U gibt, der a und T enthält. Da T maximal ist und $T \subset U \subset G$ gilt, folgt $T = U$ und damit insbesondere auch $a \in T$. Es gilt also $T \subset A$ (nach Voraussetzung) und $A \subset T$ (denn $a \in A$ war beliebig), und damit $A = T$. □

Beispiel (4.27)**.** Wenn $a \in \mathrm{U}(n)$ mit allen Diagonalmatrizen (wie in 4.16) kommutiert, so ist a selber eine Diagonalmatrix.

Beweis. Die Menge T der Diagonalmatrizen ist ein maximaler Torus (nach 4.16) und daher natürlich auch eine abelsche zusammenhängende Untergruppe. Wenn $a \in \mathrm{U}(n)$ mit allen Matrizen aus T kommutiert, existiert also nach 4.25 ein Torus U, der a und T enthält. Da T ein maximaler Torus ist, muss U schon T selbst sein, also ist auch a eine Diagonalmatrix. □

Bemerkung (4.28)**.** Im Allgemeinen stimmt es nicht, dass eine maximale abelsche Untergruppe auch ein Torus ist. Zum Beispiel sei $G = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, und man betrachte die Menge M der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Diese bilden eine maximale abelsche Untergruppe aber keinen Torus.

Definition (4.29)**.** Sei T ein maximaler Torus von G. Als *Weyl-Gruppe* W von G wird die Gruppe der Automorphismen von T, die Einschränkungen von inneren Automorphismen von G sind, bezeichnet. Dies ist unabhängig von der Wahl von T. Jeder solche Automorphismus hat die Form $t \mapsto ntn^{-1}$ für ein gewisses $n \in \mathrm{N}(T)$.

$\mathrm{N}(T)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, und damit kompakt. Ebenso ist $\mathrm{Z}(T)$[2] auch abgeschlossen, und es gilt $T \subset \mathrm{Z}(T) \subset \mathrm{N}(T)$. Es gilt $\mathrm{N}(T)/\mathrm{Z}(T) \cong W$. Da wir G als zusammenhängend vorausgesetzt haben gilt $\mathrm{Z}(T) = T$ (nach 4.25, T als zusammenhängende abelsche Untergruppe wählen) und damit $W \cong \mathrm{N}(T)/T$. Wie im Beweis von 4.21 gezeigt ist $\mathrm{N}(T)/T$ endlich, also ist auch W endlich.

Korollar (4.30)**.** (Korollar von 4.21)

Sei V ein G-Raum. Dann ist χ_V bestimmt durch seine Beschränkung auf T, und χ_V ist invariant unter W.

---

[2]Sei $T \subset G$. Der *Zentralisator* von T in G ist $\mathrm{Z}(T) := \{x \in G : \forall t \in T : xtx^{-1} = t\}$.

Beweis. Beschränkung: Sei $x \in G$, nach 4.21 existiert dann ein $t \in T$ so dass für ein gewisses $g \in G$ gilt: $x = gtg^{-1}$. Es gilt nun:

$$\chi_V(x) = \chi_V(gtg^{-1}) = \chi_V(t).$$

Es reicht also χ_V auf T zu kennen. *Invarianz*: Sei $w \in W, x \in G$. Dann gilt (für gewisses $n \in G$)

$$\chi_V(w(x)) = \chi_V(nxn^{-1}) = \chi_V(x). \qquad \square$$

Korollar (4.31)**.** Der Homomorphismus $i^* : K_{\mathbb{C}}(G) \to K_{\mathbb{C}}(T)$ von Darstellungsringen[3] ist injektiv, und sein Bild ist enthalten im Unterring der Elemente, die invariant unter W sind.

Lemma (4.33)**.** Wenn $t_1, t_2 \in T$ konjugiert sind, so existiert ein $w \in W$ mit $t_2 = w(t_1)$.

Beweis. Sei $H = \mathrm{Z}(t_2)$ und sei $t_2 = gt_1g^{-1}$ für ein gewisses $g \in G$. Dann gilt $T \subset H$ und auch $gTg^{-1} \subset H$. Da H eine abgeschlossene Untergruppe von G und damit eine Lie-Gruppe ist, sind T und gTg^{-1} maximale Tori von H.

Es gibt also ein $h \in H$ mit $T = hgTg^{-1}h^{-1}$ (maximale Tori sind konjugiert). Aber es ist $h \in \mathrm{Z}(t_2)$, und damit schickt die Konjugation mit hg, $hgt_1g^{-1}h^{-1} = t_2$, welche in W liegt (denn $T = hgTg^{-1}h^{-1}$), t_1 auf t_2. $\square$

Satz (4.32)**.** Einschränkung ergibt eine Bijektion zwischen Klassenfunktionen auf G und stetigen Funktionen auf T, die invariant unter W sind.

Beweis. Dass man eine Klassenfunktion auf G zu einer unter W invarianten stetigen Funktion auf T einschränken kann ist klar (benutzen der Eigenschaft $\bar{f}(xtx^{-1}) = \bar{f}(t)$).

Sei nun andersherum ein stetiges $f : T \to \mathbb{C}$ gegeben, das invariant unter W ist. Erweitere f zu $\bar{f} : G \to \mathbb{C}$ durch $\bar{f}(xtx^{-1}) = f(t)$. Die Wohldefiniertheit von $\bar{f}$ folgt aus 4.33 (f unter dem w aus 4.33 invariant).

Zu zeigen ist also noch, dass $\bar{f}$ stetig ist. Dazu nehmen wir an, dass $\bar{f}$ nicht stetig ist, d.h. es gibt eine Folge $g_n \to g_\infty$ so, dass keine Teilfolge von $\bar{f}(g_n)$ gegen $\bar{f}(g_\infty)$ konvergiert. Sei $g_n = x_n t_n x_n^{-1}$ ($x_n \in G$, $t_n \in T$) und wähle eine Teilfolge mit $x_n \to x_\infty$, $t_n \to t_\infty$. Dann gilt $g_n \to x_\infty t_\infty x_\infty^{-1} = g_\infty$. Es gilt nun

$$\bar{f}(g_n) = f(t_n) \to f(t_\infty) = \bar{f}(g_\infty),$$

was im Widerspruch zur Annahme steht. Folglich ist $\bar{f}$ stetig. $\square$

Satz (4.34)**.** Sei $\mathrm{N}(g)_1$ die Zusammenhangskomponente des Normalisators eines Elementes $g \in G$. Dann ist $\mathrm{N}(g)_1$ die Vereinigung der maximalen Tori von G, die g enthalten.

Beweis. Es ist klar, dass $\mathrm{N}(g)_1$ alle diese Tori enthält (Sei $t \in T$, wobei T ein maximaler Torus von G sei, der g enthält. Dann $gt = tg$, denn T abelsch, $g, t \in T$). Sei nun $n \in \mathrm{N}(g)_1$. Dann liegt n in einem maximalen Torus S von $\mathrm{N}(g)_1$. Da S mit g kommutiert gibt es einen maximalen Torus T von G, der S und g enthält (nach 4.25), also liegt $\mathrm{N}(g)_1$ in der Vereinigung der maximalen Tori. $\square$

Korollar (4.35)**.** Die folgenden beiden Definitionen sind äquivalent:

(1) Ein Element von G heißt *regulär*, wenn es nur in einem maximalen Torus enthalten ist, *singulär* wenn es in mehr als einem maximalen Torus enthalten ist,
(2) $g \in G$ heißt *regulär*, wenn $\dim(\mathrm{N}(g)) = \mathrm{Rang}(G)$ gilt, *singulär*, wenn $\dim(\mathrm{N}(g)) > \mathrm{Rang}(G)$ gilt.

---

[3]Sei V eine G-Darstellung, dann ist $i^*([V])$ die Äquivalenzklasse von T-Darstellungen, die durch Einschränkung auf T entsteht.

Beweis. Wenn g nur in einem maximalen Torus T liegt, so gilt

$$\dim \mathrm{N}(g) = \dim \mathrm{N}(g)_1 \overset{4.34}{=} \dim T = \mathrm{Rang}(G).$$

Wenn g in T_1 und T_2 liegt, $T_1 \neq T_2$, so ist $L(T_1) \neq L(T_2)$ und

$$L(T_1) + L(T_2) \subset L(\mathrm{N}(g))$$

(denn $T_1, T_2 \subset N(g)$), also gilt $\dim \mathrm{N}(g) > \dim T_1$. □

Beispiel (4.36)**.** Sei $G = \mathrm{Sp}(1)$, was die Menge der Quaternionen q mit $|q| = 1$ ist. Maximale Tori sind Kreise $\cos\theta + p \sin\theta$, wobei p ein beliebiges rein imaginäres Quaternion mit $|p| = 1$ ist.

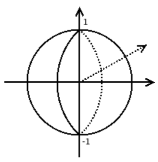
Die singulären Punkte sind ± 1 mit $\dim(\mathrm{N}(\pm 1)) = 3$, alle anderen Punkte g sind regulär, und es gilt $\dim(\mathrm{N}(g)) = 1$.

Beweis. Die maximalen Tori sind „Großkreise“ auf der (dreidimensionalen) Sphäre $\mathrm{Sp}(1)$, die durch die Pole ± 1 gehen. Die Punkte ± 1 liegen in jedem dieser Tori, sind also singulär und es gilt

$$\dim \mathrm{N}(\pm 1) = \dim \mathrm{Sp}(1) = 3.$$

Alle anderen q liegen nur in einem Torus, sind also regulär, und es gilt nach 4.35:

$$\dim \mathrm{N}(g) = \mathrm{Rang}(G) = \dim T = 1.$$



□

Satz (4.37)**.** *W permutiert die Wurzeln von G.*

Beweis. (Zur Notation siehe 1.10) Für jedes $w \in W$ haben wir zwei Darstellungen von T zu betrachten, nämlich

$$T \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}\, L(G)$$

und

$$T \xrightarrow{w} T \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}\, L(G).$$

Es genügt zu zeigen, dass diese äquivalent sind (4.12). Aber es gilt $w = A_x|T$ für geeignetes $x \in G$, und dann liefert $L(G) \xrightarrow{A'_x} L(G)$ die verlangte Äquivalenz, denn

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "A_x"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}"'] & T \arrow[d, "\mathrm{Ad}"] \\ \mathrm{Aut}\, L(G) \arrow[r] & \mathrm{Aut}\, L(G) \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei die untere Abbildung durch A'_x induziert wird. □

Definition (4.38)**.** Sei $U_r = \{t \in T : \theta_r(t) = 0 \mod 1\}$. Dies ist eine abgeschlossene Untergruppe von T mit der Dimension $k - 1$, wobei $k = \mathrm{Rang}(G)$ ist. U_r ist topologisch zyklisch, muss aber nicht zusammenhängend sein.

Beispiel (4.39)**.** Mit $G = \mathrm{Sp}(1)$ und Wurzel $\theta_1 = 2x_1$ von G ist U_1 gegeben durch $x_1 = 0 \mod \frac{1}{2}$.

Beweis. In Beispiel 4.18 sind die Wurzeln angegeben, eine davon ist $2x_1$. Die Behauptung folgt direkt aus Definition. □

Satz (4.40)**.** Wenn t in genau ν der U_r liegt, so gilt $\dim \mathrm{N}(t) = k + 2\nu$.

Beweis. Sei $V \subset L(G)$ der Unterraum, auf dem t als die Identität operiert. Dann gilt nach Definition $\dim V = k + 2\nu$ (denn $L(G) = V_0 \oplus \sum_{i=1}^{m} V_i$, wobei T auf V_0 als Identität operiert, ebenso auf den V_i, die zu U_r gehören, diese haben jeweils Dimension 2, alles nach 4.12). Wir zeigen $L(\mathrm{N}(t)) = V$.

(1) Die Elemente von $\mathrm{N}(t)$ kommutieren mit t, also agiert t als die Identität auf $\mathrm{N}(t)$ und also auch auf $L(\mathrm{N}(t))$. Also gilt $L(\mathrm{N}(t)) \subset V$.
(2) Sei $x \in V$. Dann agiert t trivial auf x und damit auch auf der Ein-Parameter-Untergruppe H, die zu x gehört (auf dem Bild). Also gilt $H \subset \mathrm{N}(t)$ und $x \in L(\mathrm{N}(t))$. Also gilt $V \subset L(\mathrm{N}(t))$.

□

Korollar (4.41)**.** Sei T ein maximaler Torus. Ein Element aus T ist regulär wenn es in keinem U_r liegt, und singulär wenn es in (mindestens) einem U_r liegt.

Beweis. Sei $t \in T$. Wenn t in keinem U_r liegt, so gilt nach 4.40:

$$\dim N(t) = k + 2\nu = k = \mathrm{Rang}(G),$$

also ist t regulär. Wenn t aber in mindestens einem U_r liegt, so gilt

$$\dim N(t) = k + 2\nu = \mathrm{Rang}(G) + 2\nu > \mathrm{Rang}(G),$$

und damit ist t singulär. □

Korollar (4.42)**.** Die singulären Elemente von G bilden eine Menge der Dimension $\leq n - 3$, wobei $n = \dim(G)$ sei, in dem Sinne dass diese Menge das Bild einer kompakten Mannigfaltigkeit der Dimension $n-3$ unter einer glatten Abbildung ist.

Beweis. Sei u ein Erzeuger von U_r. Dann gilt $\dim \mathrm{N}(u) \geq k + 2$ (Satz 4.40) und – für $z \in \mathrm{N}(u)$ – z hält jede Potenz von u und damit jedes Element aus U_r fest ($zu^n z^{-1} = u^n$).

Definiere eine Abbildung $f : G/\mathrm{N}(u) \times U_r \to G$ durch $f(g,t) = gtg^{-1}$. Dann besteht das Bild von f aus allen Punkten in Konjugierten von U_r, f ist glatt und es gilt

$$\dim G/\mathrm{N}(u) \times U_r \leq n - (k+2) + (k-1) = n - 3.$$

Man erhält alle singulären Punkte indem man r über eine endliche Menge laufen lässt, und daraus folgt die Behauptung. □

Literatur

[1] Adams, J. Frank: *Lectures on Lie Groups.* The University of Chicago Press, Chicago, 1969.

Universität Münster, Einsteinstr. 62, 48161 Münster, Germany
E-mail address: Markus@markus-keppeler.de
URL: http://www.markus-keppeler.de/studium/