Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II SS 2009
Falko Lorenz Blatt 1
Abgabetermin: Mittwoch, 22.04.2009, bis 16:10 Uhr

Aufgabe 1: Indem man sich am Beweis von 6.1.1 orientiert, zeige man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Log(x+i)}{x^2+1}dx \;=\; \pi \log 2 + i\frac{\pi^2}{2}$$

Aufgabe 2: Aus Aufgabe 1 folgere man zunächst

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx \;=\; \pi \log 2$$

(Hinweis: Log$(i+x)$+ Log $(i-x) \;=\; \log(x^2+1)+\pi i$ für alle $x \geq 0$)

Mittels der Substitution $x = ctg(t)$zeige man nun

$$\int_{0}^{\pi/2} \log(\sin t)dt = -\frac{\pi}{2}log2$$

Aufgabe 3: Zeige: Jedes *schlichte* $f \in \mathcal{O}$ $(\mathbb{C})$ hat die Gestalt $f(z) = az+b$ mit $a \in \mathbb{C}^{\times}, b \in \mathbb{C}$. Insbesondere besteht daher Aut$(\mathbb{C})$ genau aus allen diesen affin-linearen Abbildungen.
(Hinweis: Ist ∞ ein Pol von f, so ist f ein Polynom, und es folgt die Behauptung. Wäre ∞ eine wesentliche Singularität von f, so gäbe es - nach Casorati-Weierstraß - eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to f(0)$. Der Satz von der Gebietstreue liefert nun einen Widerspruch zur Injektivität von f.)

Aufgabe 4: Sei (f, D) ein Funktionselement. Ein Randpunkt $b \in \partial D$ heiße ein regulärer Punkt von (f, D), wenn es ein Funktionselement (g, E) gibt mit b als Mittelpunkt von E, so dass $(g, E) \asymp (f, D)$ gilt. Ist $b \in \partial D$ kein regulärer Punkt von (f, D), so heiße b ein *singulärer Punkt von* (f, D).
Zeige: Für $D = D(0, 1)$ und

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}/n$$

ist jeder Punkt von ∂D ein singulärer Punkt von (f, D).
(Hinweis: Für jede Einheitswurzel ζ bestrachte man $f(t\zeta)$ für positive $t < 1$.)