Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II SS 2009
Falko Lorenz Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 29.04.2009, bis 16:10 Uhr

Aufgabe 5: Sei (g, E) analytische Fortsetzung von (f, D) längs einer Kurve γ in U.
Zeige:
(a) Ist (h, F) analytische Fortsetzung von (f', D) längs γ in U, so gilt $(h, F) \asymp (g', E)$
(b) ist $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein Polynom in zwei Variablen und gilt $p(z, f(z)) = 0$ auf D, so gilt auch $p(z, g(z)) = 0$ auf E.

Aufgabe 6: (a) Man gebe ein Gebiet U und $f \in \mathcal{O}(U)^\times$ an, so dass ein Zweig von $\sqrt{f}$ existiert, aber kein Zweig von $\log f$.
(b) Gegeben ein Gebiet U und ein $f \in \mathcal{O}(U)^\times$. Zeige: genau dann gibt es einen Zweig von $\log f$, wenn für unendlich viele natürliche Zahlen n ein Zweig von $\sqrt[n]{f}$ existiert.

Aufgabe 7: Sei $D = D(1, r)$ mit $0 < r \leqslant 1$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ die durch $f(z) =$Log(z) definierte Funktion auf D. Sei σ der Standardweg des Einheitskreises, betrachtet als Kurve in $U = \mathbb{C}^\times$. Zeige:
Es existiert eine analytische Fortsetzung (g, E) von (f, D) längs $\sigma(in\ \mathbb{C}^\times)$, und für jedes solche (g, E) gilt $g(z) = \text{Log}(z) + 2\pi i$ auf E.

Aufgabe 8: Zeige $\frac{1}{2}|z| \leq |\text{Log }(1 + z)| \leq \frac{3}{2}|z|$ für $|z| \leq \frac{1}{2}$.