Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II SS 2009
Prof. Dr. Falko Lorenz Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 24.06.2009, bis 16:10 Uhr

Aufgabe 33:

a) Berechne $\Gamma_n(x) := \int\limits_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \, t^{x-1} \, dt$ für $x > 0$.

b) Zeige: $e^{-t}(1 - \frac{t^2}{n}) \leq (1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$ für $0 \leq t \leq n$. (Tip: Für die erste Ungleichung bringe man die Bernoullische Ungleichung ins Spiel.)

Aufgabe 34: Zur Abkürzung setze $U := \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) > 1\}$

a) Zeige: Das über alle Primzahlen $p = p_1, p_2, ...$ erstreckte Produkt

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

ist in U *normal konvergent.*

b) Zeige: Für jedes $s \in U$ gilt

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \quad .$$

Wieso folgt daraus, daß es unendlich viele Primzahlen gibt? Ist $\zeta(s) \neq 0$ für jedes $s \in U$?

Aufgabe 35: Bestimme eine Partialbruchentwicklung von $\Gamma' \,/\, \Gamma$ und zeige:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \quad .$$

Aufgabe 36: Sei U ein Gebiet. Zeige, daß für Elemente f, g des Ringes $\mathcal{O}(U)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind: (i) f, g sind teilerfremd. (ii) f, g haben keine gemeinsame Nullstelle in U. (iii) Es gibt $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(U)$ mit $h_1 f + h_2 g = 1$.
Hinweis für (ii) $\Longrightarrow$ (iii): Setze $S = N_f$ und betrachte eine Lösung q der Hauptteilverteilung $\{s_a(1/fg), a \in S\}$. -
Zeige zusätzlich (4 P. extra): Zu beliebigen $f, g \in \mathcal{O}(U)$ existiert ein *größter gemeinsamer Teiler* d von f, g in $\mathcal{O}(U)$, und jedes solche d hat eine Darstellung $d = h_1 f + h_2 g$ mit $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(U)$. Jedes endlich erzeugte Ideal von $\mathcal{O}(U)$ ist ein Hauptideal. Ist $\mathcal{O}(U)$ ein Hauptidealring?