Prof. K. Tent
Dr. M. Bays

Universität Münster
Wintersemester 2016/2017

Modelltheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $A, B \subseteq M$ und $(c_0, \ldots, c_n)$ eine Folge von Elementen, welche nicht algebraisch über A sind. Angenommen $\mathcal{M}$ sei $|A \cup B|^+$-saturiert. Zeigen Sie, dass der Typ $\mathrm{tp}(c_1, \ldots, c_n/A)$ eine Realisierung $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathcal{M}^n$ hat, so dass keines der m_i in B liegt.
Hinweis: Induktion über n. Unterscheiden Sie, ob c_i algebraisch über Ac_n für ein $i < n$ ist oder nicht.

Aufgabe 2. Sei S die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{Z}$ und $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, S)$. Skizzieren Sie, dass T Quantorenelimination hat und beschreiben Sie die Modelle von T. In welchen Kardinalitäten ist T kategorisch? Wieviele paarweise nicht-isomorphe abählbare Modelle gibt es? Zeigen Sie, dass $\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{acl}(a)$ für jedes $A \subseteq \mathcal{M} \models T$ gilt. Folgern Sie, dass acl eine Prägeometrie auf M definiert.

Aufgabe 3. Sei G ein Graph mit Kantenmenge K. Wir definieren $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(K)$ wie folgt: Für $k \in K$ und $H \subseteq K$ gilt genau dann $k \in \mathrm{cl}(H)$, wenn $k \in H$ gilt oder wenn k zu einem endlichen Kreis gehört, dessen übrige Kanten alle in H liegen.

a) Zeigen Sie, dass cl eine Prägeometrie auf K definiert.
b) Zeigen Sie, dass falls G endlich ist, die Dimension von K genau der Zahl der Ecken $|E|$ minus der Zahl der Zusammenhangskomponenten von G entspricht.
Hinweis: Ein Baum mit n Kanten hat $n + 1$ Ecken.

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie direkt, dass streng minimale Theorien den Quantor $\exists^\infty$ eliminieren.
b) Geben Sie ein Beispiel einer unendlichen Struktur $\mathcal{M}$, einer endlichen Menge $A \subseteq M$ und eines nicht-algebraischen Types $p \in S_1(A)$ an, so dass $p(M)$ endlich ist.
Anmerkung: Laut Aufgabe 4 auf Blatt 10 ist $\mathcal{M}$ also nicht ω-saturiert.

Abgabe bis Montag, den 23.01, 09:00 Uhr, Briefkasten 168.
Die Übungsblätter sollen zu zweit bearbeitet und abgegeben werden.
Web-Seite: `https://wwwmath.uni-muenster.de/u/baysm/logikII/`