Wir sind besonders interessiert an $K = \mathbb{R}$, mit $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$, $I = \mathbb{N}$, μ Ultraf.
Dann ist $\mathbb{R}^*$ ein geordn. Körper und das Elt $(n)_\mu > k$, $0 < \left(\frac{1}{n}\right)_\mu < \frac{1}{k}$ f. a. $k \in \mathbb{N}$
d. h. $\mathbb{R}^*$ enthält unendl. gr. Elte (größer als alle $n \in \mathbb{N}$) und infinitesim. Elt. (d.h. pos. und kleiner $\frac{1}{k}$ f. a. $k \in \mathbb{N}$).

<u>Bsp</u> 4.10 Sei (X, d) ein metr. Raum aufgefasst als 2-sortige Struktur $(X, d, \mathbb{R}, +, \leq)$
Das Ultraprod. ist <u>kein</u> metr. Raum, weil die "Metrik" Werte in $\mathbb{R}^*$ annimmt.

<u>Def</u> 4.11 Sei $\mathbb{R}^* = \prod(\mathbb{R}, +, <)/\mu$.
Sei $\mathrm{Fin}(\mathbb{R}^*) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid |x| < n \text{, ein } n \in \mathbb{N}\}$.
$\mathrm{Inf}(\mathbb{R}^*) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid |x| < \frac{1}{n} \text{ alle } n \in \mathbb{N}\}$
Dann ist jedes $x \in \mathrm{Fin}(\mathbb{R}^*)$ von der Form
$$x = r + \varepsilon \quad \text{für eind. } r \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \mathrm{Inf}(\mathbb{R}^*).$$
Die Abb. $\mathrm{stand}: \mathrm{Fin}(\mathbb{R}^*) \to \mathbb{R}$, $x = r + \varepsilon \mapsto r$
heißt Abb. auf den Standardteil.

<u>Def</u> 4.12 Sei (X, d) ein metr. Raum, $R \in \mathbb{R}^* \setminus \mathrm{Fin}(\mathbb{R}^*)$
μ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, $x_0 \in X$.
Dann ist der asympt. Kegel von (X, d, x_0)

folgendermaßen def.

Sei $X^* = \prod X/_\mu$ mit $d^*: X^* \times X^* \to \mathbb{R}^*$

Sei $X^{*(R)} = \{x \in X^* / d^*(x, x_0)/_R < n$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$

und def $x \underset{R}{\sim} y$ falls $d^*(x,y)/_R \in \mathrm{Inf}(\mathbb{R}^*)$.

Dann ist $x \underset{R}{\sim} y$ Äquivrel. auf $X^{*(\mathbb{R})}$

und $d(x,y) = st(d^*(x,y)/_R)$ definiert

eine Metrik auf $\mathrm{Cone}^R_\mu(X,x_0) = X^{*(\mathbb{R})}/_\sim$

<u>Bem</u> 4.13 (i) Cone(X) hängt nicht von x_0 ab:

Ist $y \in X$ ein anderer Punkt, dann ist $d^*(x_0,y)/_R \in \mathrm{Inf}$,

d.h. $x_0/_R = y/_R$.

(ii) $R \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathrm{Fin} \Rightarrow R = (n_i)_{i \in \mathbb{N}}$; $n_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$.

Wir können und Cone(X) vorstellen als Ultraprod.

$\prod_{i \in \mathbb{N}} (X, \frac{1}{n_i} d)/_\mu$, darin ${}^*X$ die Menge der Pkte.

die endl. Abst. von x_0 haben bzgl $x \sim y$, falls

$\frac{1}{R} d^*(x,y) \in \mathrm{Inf}$.

(iii) Ob Cone(X) von μ abhängt, hängt von X (und

den Ax. der Mengenlehre) ab.

<u>Bsp</u> 4.14 (i) $\mathrm{Cone}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ mit NYC

Taxi-metrik. Bew gleich allgem.

(iii) Ist X δ-hyperbolisch, dann ist $\mathrm{Cone}(X)$ (0-hyperb.) $\mathbb{R}$-Baum:

Erinnerung: Es genügt z.z.:

Für alle $x, y, z, w \in \mathrm{Cone}(X)$ gilt

$$(x \cdot z)_w \geq \min\{(x \cdot y)_w, (y \cdot z)_w\}$$

Dabei ist $(x \cdot y)_w = \frac{1}{2}\left[d(x,w) + d(y,w) - d(x,y)\right]$.

Für alle $x, y, z, w \in {}^*X$ gilt

$$(x \cdot z)^*_w \geq \min\{(x \cdot y)^*_w, (y \cdot z)^*_w\} - \delta$$

Im $\mathrm{Cone}(X)$ folgt die Beh. wegen $\delta/R \in \mathrm{Inf}$.

<u>Satz</u> 4.15 Seien (X, d_1), (Y, d_2) metr. Räume, $f : X \to Y$ eine QI. Dann induz. f einen (bi-Lipschitz) Homöom. ${}^*f : \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Cone}(Y)$.

<u>Bew:</u> Zuerst induz. f eine Abb.

$${}^*f : {}^*X \to {}^*Y \quad \text{mit}$$

$$\frac{1}{\lambda}\, {}^*d_1(x_1, x_2) - C \leq {}^*d_2({}^*f(x_1, x_2)) \leq \lambda\, {}^*d_1(x_1, x_2) + C$$

Weil $\lambda, C \in \mathbb{R}$, induz. ${}^*f : \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Cone}(Y)$ und wegen $C/R \in \mathrm{Inf}$ folgt die Beh.

<u>Kor 4.16</u> $\quad \mathrm{Cone}(\mathbb{Z}^n) \cong \mathbb{R}^n$

<u>Ziel:</u> Betrachte $G = \langle X \rangle$, $\Gamma = \Gamma_X(G)$, d.h. wir betrachten G mit Wortmetrik bzgl X.

<u>Zeige</u> $\quad Y = \mathrm{Cone}(\Gamma)$ ist

(i) homogen

(ii) zsh und lok. zsh

(iii) vollst.

Nonstandard Extensions (van den Dries - Wilkie §3)

- $|I| = \aleph_0$, D nonprincipal ultrafilter on I. Say $P(i)$ holds "for almost all i" (a.a. i) if $\{i : P(i) \text{ holds}\} \in D$
- ${}^*S := S^I/D$. Consider S as subset $S \subseteq {}^*S$ via diagonal embedding
- For $V \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$, identify ${}^*V$ with
  ${}^*V = \{ (f_1/D, \dots, f_n/D) : (f_1(i), \dots, f_n(i)) \in V \text{ a.a. } i \} \subseteq {}^*S_1 \times \dots \times {}^*S_n$
- Note ${}^*V \cap (S_1 \times \dots \times S_n) = V$
- If V is the graph of a function $V : S_1 \times \dots \times S_{n-1} \to S_n$
  then ${}^*V$ " " " " " " " " " " " " ${}^*V : {}^*S_1 \times \dots \times {}^*S_{n-1} \to {}^*S_n$
  extending V.
- So if S is an $\mathcal{L}$-structure with relations R_i and functions F_i
  then ${}^*S$ is an $\mathcal{L}$-structure with relations ${}^*R_i$ and functions ${}^*F_i$
  and $S \subseteq {}^*S$ is an embedding of $\mathcal{L}$-structures
  (e.g. $\mathcal{L} = \{\cdot\}$, S a group, then S is a subgroup of ${}^*S$ (we see below that the group axioms hold for ${}^*S$).

- Def^n: $W \subseteq {}^*S_1 \times \dots \times {}^*S_n$ is <u>internal</u> if $W = \prod_i W_i/D$ for some subsets $W_i \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$ $(i \in I)$,
  i.e. if for all $f_1 \in S_1^I, \dots, f_n \in S_n^I$,
  $(f_1/D, \dots, f_n/D) \in W \iff ((f_1(i), \dots, f_n(i)) \in W_i \text{ a.a. } i)$

  These W_i are the <u>components</u> of W, and they are well-defined "up to D",
  i.e. if $W = \prod_i W_i'/D$ then $W_i = W_i'$ a.a. i

- <u>Rem</u>ks: For $V \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$, ${}^*V$ is internal. Not all internal sets are of this form.

  - $F : {}^*S_1 \times \dots \times {}^*S_{n-1} \to {}^*S_n$ is internal iff there are $F_i : S_1 \times \dots \times S_{n-1} \to S_n$
    s.t. $F(f_1/D, \dots, f_{n-1}/D) = (i \mapsto F_i(f_1(i), \dots, f_{n-1}(i)))/D$

- <u>Lemma</u> 3.14:
  (i) If $n \in \mathbb{N}$ and $W_i \subseteq S$ and $|W_i| \leq n$ a.a. i
  then $|\prod_i W_i/D| \leq n$

  (ii) No infinite subset of S is an internal subset of ${}^*S$

<u>Proof</u>: (i) If $f_1/D, \dots, f_{n+1}/D \in \prod_i W_i/D$ are distinct,
then $f_1(i), \dots, f_{n+1}(i)$ are distinct a.a. i

(ii) Suppose $A \subseteq S$ is infinite and internal, say $A = \prod A_i/D$ with $A_i \subseteq S$.
Let $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ be distinct elements of A.
We may assume $I = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$
We may assume $a_0 \in A_i$ for all $i \in I$ (adjoining a_0 as necessary)
Let $f(n) := \begin{cases} a_j & \text{where } j \text{ is maximal s.t. } a_j \in A_n \text{ if such } j \text{ exists} \\ a_{n+j} & \text{where } j \text{ is minimal s.t. } a_{n+j} \in A_n \text{ else.} \end{cases}$

Then $f/D \in \prod A_i/D = A$, so $f/D = a_m$ for some $m \in \mathbb{N}$.
But then $a_{m+1} \notin A_n$ for $n > m$
so $a_{m+1} \notin A_i$ a.a. i
contradicting $a_{m+1} \in A$ $\square$

Lemma 3.15:

Suppose $g_n \in S^*$ for $n \in \mathbb{N}$.
Then there is an internal function $F : \mathbb{N}^* \to S^*$
with $F(n) = g_n$ for $n \in \mathbb{N}$.

Proof: Say $g_n \in f_n/_D$, $f_n \in S^I$
Let $F_i : \mathbb{N} \to S$; $n \mapsto f_n(i)$.
Let $F := \prod F_i/_D : \mathbb{N}^* \to S^*$
Then for $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = (i \mapsto F_i(n))/D$
$= f_n/D = g_n$ $\square$

• For [illegible] $S_1, \dots, S_n$ [illegible]
[illegible] a property Φ [illegible]
which can [illegible] using:
• $\exists y$ [illegible]
• [illegible]
• [illegible] $\to$
• [illegible] $\exists x \in \Pi$ $\forall y \in \Pi$ [illegible] property [illegible]
• [illegible] $\exists X \subseteq \Pi$ $\forall Y \subseteq \Pi$ [illegible]

Say [illegible] elementary [illegible] 1st order [illegible] no set quantifiers.

• E.g. [illegible]
• The property Φ_1 of $\leq$ [illegible] expressed by
$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y)$
$\wedge \forall z \in \mathbb{R}((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z)$
$\wedge (x \leq y \vee y \leq x))$

Φ_1 is elementary.

• The property Φ_2 of $\leq$ [illegible] expressed by
$\forall X \subseteq \mathbb{R}\ ((\exists x \in \mathbb{R}\ x \in X \wedge \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x \in X \to x \leq y))$
$\to \exists z \in \mathbb{R}\ (\forall x \in \mathbb{R}\ (x \in X \to x \leq z \wedge \forall t \in \mathbb{R}$ [illegible] $))$

("every upper bounded set has a supremum")

Not elementary.

• Given Φ, let Φ^* be the property of subsets and elements of finite products of $S_1^*, \dots, S_n^*$
obtained by replacing
$\exists x \in \Pi \rightsquigarrow \exists x \in \Pi^*$ $\quad \forall x \in \Pi \rightsquigarrow \forall x \in \Pi^*$ $\quad$ (where if $\Pi = \prod_j S_{i_j}$ then $\Pi^* = \prod_j S_{i_j}^*$)
$\exists X \subseteq \Pi \rightsquigarrow$ "there exists an internal subset of Π^* such that..."
$\forall X \subseteq \Pi \rightsquigarrow$ "for all " " " "...

• Fact [Łoś's Theorem]:
Φ^* holds of internal sets $W_1 = \prod_i W_{1,i}/_D, \dots, W_m = \prod_i W_{m,i}/_D$ and elements $f_1/_D, \dots, f_k/_D$
if and only if Φ holds of $W_{1,i}, \dots, W_{m,i}$ and $f_1(i), \dots, f_k(i)$ a.a. i.
In particular, Φ holds of (standard sets and elements) $V_1, \dots, V_m$ and $s_1, \dots, s_k$
if and only if Φ^* holds of $V_1^*, \dots, V_m^*$ and $s_1, \dots, s_k$.