2-Komplexes, der die Färbung erhält, d.h. für alle Kanten e gilt $\varphi(e) = \varphi(\alpha(e))$.

Nach Konstruktion gilt:

Prop 1.22 Der Cayley-Komplex $C(X|R)$ ist einfach zsh, d.h. $\pi(C(X|R), 1) = 1$.

Bew Zz: Ist p ein geschl. Weg an 1, dann ist $p \sim 1$. Es ist aber $\varphi(p) \in \langle R \rangle^{F(X)}$ und daher folgt die Beh. aus der Konstruktion.

Kor 1.23 Der Cayley-Komplex $C(X|R)$ ist die universelle Überlagerung von $K(X|R)$.

Bew: Die Abb. $f: C(X|R) \to K(X|R)$, $f(g) = v$, $f(g,x) = x$, $f(D(g,r)) = D_r$ ist eine Überl.

Wir können diese Überlagerung auch als Quotient einer Gr.wirkung beschreiben:

Def 1.24 Autom. des Cayley-Komplex

Prop 1.25 Die Autom. von $C(X|R)$ sind genau die durch Linksmultipl. mit Elten von G induz. Autom. D.h. für jeden färbungserh. Autom α von $C(X|R)$ ex $h \in G$ mit $\alpha(g) = h \cdot g$, $\alpha(g,x) = (hg,x)$ und $\alpha(D(g,r)) = D(hg,r)$.

Bew: Dies folgt daraus, dass der Zentralisator der Rechtsreg. Darst. genau die Linksreg. Darst. ist.

<u>Kor</u> 1.26 Der Quotient des Cayley-Kompl $C(X|R)$ unter den Färbungserhalt. Autom. ist der Komplex $K(X|R)$.

§ 2 Small cancellation und hyperb. Gr

<u>Def</u> 2.1 Eine Präsentierung $G = \langle X | R \rangle$ ist eine Dehn-Präsentierung, wenn jedes reduz. Wort in $F(X)$, das in G die Identität darstellt, mehr als die Hälfte eines Relators enthält.

<u>Satz</u> 2.2. Wenn $G = \langle X | R \rangle$ eine Dehn-Präsent. ist, dann ist das Wortproblem in G entscheidbar.

<u>Bew</u>: Sei $w \in F(X)$ reduz. Wenn w mehr als die Hälfte eines Relators $r = r_1 r_2$ mit $|r_2| > |r_1|$ enthält, $w = r_2^{-1} u$, dann ist rw in G die Identität gdw w die Identität ist und $|rw| < |w|$. Nach endl. vielen Schritten ist $w = 1$ oder nicht weiter kürzbar.

Wir werden sehen, dass die 'small cancellation' Bedingung eine Dehn-Präsent. impliziert.

<u>Def</u> 2.3 Eine <u>Karte</u> ist ein endlicher, planarer, zsh und einf. zsh 2-Komplex.

Wir sagen, dass eine Karte D ein Diagramm über dem Alphabet X ist, wenn jede Kante e in D mit einem $x \in X \cup X^{-1}$ gefärbt ist, i.e. $\varphi(e) = x$ und $\varphi(e^{-1}) = \varphi(e)^{-1}$.

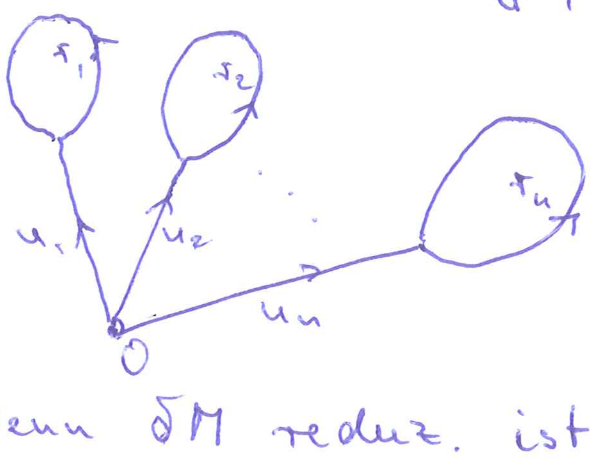
Wie immer induz. φ eine Abb. von (reduz.) Wegen in D in die (reduz.) Worte in $F(X)$.

Der Rand einer Karte ist ein (nicht notw. ~~reduz.~~ ~~oder~~ einfacher) Weg.

Def 2.5 Ein van Kampen Diagramm zu einer Gruppe $G = \langle X \mid R \rangle$ ist ein Diagramm M über X so, dass alle Flächen D als Randzykel $\varphi(\partial(D))$ ~~zykl.~~ äquiv. zu einem $r \in R \cup R^{-1}$ besitzen und ∂M reduziert ist.

Satz 2.6 (Van Kampen). Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ endl. präs., alle $r \in R$ zykl. reduz. Dann ist ein Wort $\overline{w} = 1_G$ gdw es ein van Kampen-Diagr. M über G gibt mit $\partial(M) = w$.

Bew: "⇒" Ist $\overline{w} = 1_G$, dann ist $w = r_1^{u_1} \cdots r_n^{u_n}$.



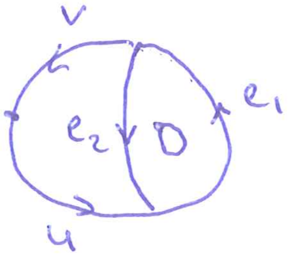
Betrachte M.

Wenn ∂M reduz. ist, dann fertig. Sonst reduziere die Wege sukzessive.

„$\Leftarrow$" Ist umgekehrt w die Randfärbung eines van Kampen Diagramms M, dann zeigen wir $\overline{w}=1$ durch Indukt. über die Anzahl k der Flächen in M. Ist $k=1$, dann gilt die Beh. offens.

Ist nun M van Kampen Diagr. mit $k+1$ Flächen, dann ex. eine Fläche D in M mit $\partial M \cap \partial D$ enthält eine Kante e_1, ~~nach~~ $\partial M = w = u e_1 v$ für reduz. Worte u, v. Ist $\partial D = e_1 e_2$, dann ist $\partial M = u e_1 e_2 e_2^{-1} v = u e_1 e_2 u^{-1} u e_2^{-1} v$.

Weil $M \setminus D$ nur k Flächen hat, ist $\overline{u e_2^{-1} v} = 1$ und $\overline{u e_1 e_2 u^{-1}} = 1$, also $\overline{w}=1$.



Def 2. (i) Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ endl. präs., $w \in F(X)$ mit $\overline{w} = 1$. Dann heißt $A(w) = \min\{n \mid w = \prod_{i \le n} r_i^{u_i}\}$ der Inhalt von w.

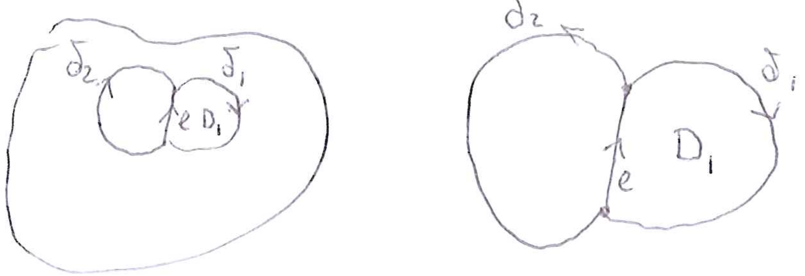
(ii) Ein min. van-Kampen Diagramm für $\overline{w}=1$ ist ein Diagramm mit min. Anzahl an Flächen (d.h. $A(w)$ viele Flächen)

Bem 2.8 → p 18b

Def 2.8 (1) (iii) Ist $G = \langle X \mid R \rangle$ endl. präs., dann heißt R symmetrisch, wenn jedes $r \in R$ zykl. red. und für jedes $r \in R$ auch jedes zykl. Konjug. von r in R ist.

<u>Bem 2.8</u> Ist M ein minimales van Kampen-Diagr. für w, dann ist M reduziert im folgenden Sinn: Sind D_1, D_2 Flächen in M (nicht notw. verschieden), $e \subseteq \partial D_1 \cap \partial D_2$ eine Kante, $\partial D_1 = e\delta_1$, $\partial D_2 = \delta_2 e^{-1}$, dann ist $\varphi(\delta_1) \neq \varphi(\delta_2)^{-1}$

<u>Bsp:</u>



<u>Bew:</u> Sind $D_1 \neq D_2$, $\varphi(\delta_1) = \varphi(\delta_2)^{-1}$, entferne e und färbe $\delta(D_1 \cup D)$ mit 1. Die neue Karte M' ist zsh und einf. zsh und die gleiche Randfärbung wie M und nach 2.5 ist w Prod. von Konj. der Randfärbungen von Flächen in M' ↯ zur Minim.

Ist $D_1 = D_2$. und $\partial D_1 = e\delta_1$, $\partial D_2 = \delta_2 e^{-1}$ mit $\varphi(\delta_1) = \varphi(\delta_2)^{-1}$, dann sind zykl. Konj. von Worten in der freien Gr. invers zu einander ↯

→ p. 18 Def 2.8.