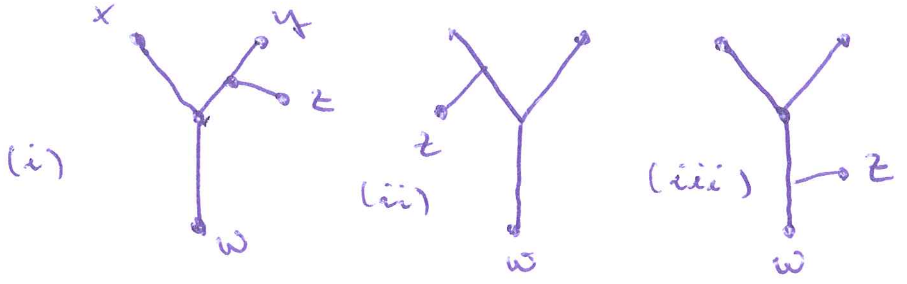
Ist (X,d) ein Baum, dann gilt für alle

$x, y, z, w \in X$

$$(x \cdot z)_w \geq \min\{(x \cdot y)_w, (y \cdot z)_w\}$$



In (i) $(x \cdot z)_w = (x \cdot y)_w < (y \cdot z)_w$

(ii) $(x \cdot z)_w > (x \cdot y)_w = (y \cdot z)_w$

(iii) $(x \cdot z)_w = (y \cdot z)_w < (x \cdot y)_w$.

<u>Def</u> 3.6 Sei (X,d) metr. Raum, $\delta \geq 0$. Dann heißt das Gromov-Prod. mit Basispkt $w \in X$ δ-hyperb., falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

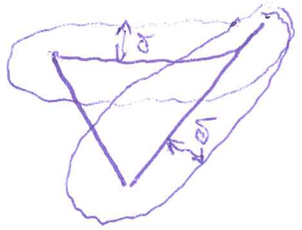
$$(x \cdot z)_w \geq \min\{(x \cdot y)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta$$

Das Grom.-Prod. mit Basispkt w ist hyperb., falls es δ gibt, so dass es δ-hyperb. ist.

<u>Def</u> 3.7 Sei (X,d) geod. Raum, Δ ein geod. Dreieck.

(i) Dann heißt Δ δ-schlank, wenn für alle Seitenord. (A, B, C), $w \in A$ gilt

$$\min\{d(w,B), d(w,C)\} \leq \delta.$$



die δ-Umgeb. von je 2 der Seiten enthalten die dritte.

Def 3.8 (i) Sei (X,d) metr. Raum, $x, y \in X$.
Ein Bogen von x nach y ist das Bild einer topol. Einbett. $\alpha : [a,b] \to X$ für ein geschl. Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, (mögl. $a=b$) mit $\alpha(a)=x$, $\alpha(b)=y$

~~Def 3.8~~ (ii) Ein geod. Raum (X,d) ist ein $\mathbb{R}$-Baum, wenn es für alle $x, y \in \mathbb{R}$ einen eind. Bogen von x nach y gibt und dieser mit dem geod. Weg übereinstimmt.

Bsp: (i) Simpl. Bäume, i.e. Gph ohne Zykel
(ii) $X = \mathbb{R}^2$ mit SNCF-Metrik d: Sei e die Euklid. Metrik auf X. Wenn x, y auf einer Gerade durch $(0,0)$ liegen, setze $d(x,y) = e(x,y)$, sonst $d(x,y) = e(0,x) + e(0,y)$.

Bem: Nach Konstr. von $(\cdot)_\omega$ sind Bäume 0-hyp. für alle ω.

Lemma 3.9 (Punkte verbinden) Ist (X,ω,d) 0-hyperb., dann ex $\mathbb{R}$-Baum (T, d_T) und Isom. einb. $i : X \to T$ mit
(i) kein echter Teilbaum von T enthält $i(X)$
(ii) Wenn $j : X \to T'$ eine isom. Einbett. von X in $\mathbb{R}$-Baum T' ist, dann ex eind. Isom. $k : T \to T'$ mit $ki = j$.

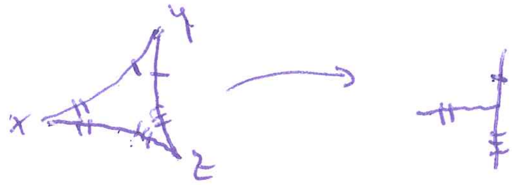
Insbes. ist T bis auf Isometrie eind.
Wenn G auf X isometr. operiert, dann lässt sich die Wirkung eind. auf T fortsetzen.

Beweis: Ist $i: X \to T$ eine isometr. Einbettung wie in (i), dann ist T Vereinig. von Segmenten der Form $J_x = [i(w), i(x)]$, $x \in X$. Dabei ist die Länge von $J_x = d(w,x)$ und $J_x \cap J_y$ schneidet sich in $(x \cdot y)_w$.
Daher konstr. wir T aus den Segmenten $J_x = [0, d(w,x)]$ für $x \in X$ und identif. J_x und J_y auf dem Intervall $[0, (x \cdot y)_w]$.
Offens. ist T eind. best. und es ist klar, wie K in (ii) konstr. werden muss.

Kor 3.10 Ein geod. Raum, der 0-hyp. bzgl $w \in X$ ist, ist ein $\mathbb{R}$-Baum

(ii) Ist T der Tripod mit denselben Seitenlängen wie Δ, $p: \Delta \to T$ die nat. Proj., dann heißt Δ <u>δ-dünn</u>, falls für alle $t \in T$ gilt

$$\operatorname{diam}(p^{-1}(t)) \le \delta$$



<u>Bem:</u> Offens. hat $p^{-1}(t)$ ein, zwei oder drei Elte.

<u>Prop 3.12</u> Sei (X,d) geod. Raum. Dann sind äquiv.: $X \neq \emptyset$

(i) Es ex $w \in X$, so dass das Grom.-Prod. bzgl w hyperb. ist

(ii) Für alle $w \in X$ ist das Grom.-Prod. bzgl w δ-hyperb.

(iii) Es ex $\delta \ge 0$ so, dass alle geod. Dreiecke δ-schl. sind

(iv) ——— " ——— δ-dünn sind

<u>Bew:</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) ✓, (iv) $\Rightarrow$ (iii) ✓

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $w \in X$ so, dass das Grom.-Prod bzgl w δ-hyperb. ist und sei $t \in X$ bel., $xy = (x \cdot y)_w$.

Zeige: Das Grom.-Prod bzgl t ist 2δ-hyperb.

Es ist
$$\begin{aligned} xy + zt &\ge \min\{xt, ty\} - \delta + zt \\ &= \min\{xt + zt, ty + zt\} - \delta \\ &\ge \min\{xt + \min\{zy, yt\},\ ty + \min\{zx, xt\}\} - 2\delta \\ &\underset{(**)}{=} \min\{xt + zy, xt + yt, yt + zx\} - 2\delta \end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$xy + zt \underset{(*)}{\ge} \min\{xz + zy, xz + yt, zy + xt\} - 2\delta$$

Wenn $\min\{xt+zy, xt+yt, yt+zx\} = xt+yt$,

dann ist $yt \le yz$ und $xt \le xz$

und daher $xz+yz \ge \min\{xz+yt, zy+xt\}$.

Dann ist in (*)

$$xy+zt \ge \min\{xz+yt, zy+xt\} - 2\delta.$$

Ebenso falls $\min\{xz+zy, xz+yt, zy+xt\} = xz+zy$

folgt $xt+yt \ge \min\{xz+yt, zy+xt\} - 2\delta$

und daher in (**) wieder

$$xy+zt \ge \min\{xz+yt, zy+xt\} - 2\delta \qquad (*)$$

__Beh__: $d(x,y)+d(z,t) \le \max\{d(x,z)+d(y,t), d(x,t)+d(y,z)\} + 4\delta$

Alles in (*) ausschreiben, wegkürzen, mit -1 multipl.

Nun folgt: X ist 2δ-hyperb. bzgl t, d.h.

$$(x\cdot y)_t \ge \min\{(x\cdot z)_t, (y\cdot z)_t\} - 2\delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[d(x,t)+d(y,t)-d(x,y)\right] \ge \frac{1}{2}\min\{d(x,t)+d(z,t)-d(x,z),\ d(y,t)+d(z,t)-d(y,z)\} - 2\delta$$

$$\Leftrightarrow d(x,t)+d(y,t)-d(x,y)-d(z,t) \ge \min\{d(x,t)-d(x,z),\ d(y,t)-d(y,z)\} - 4\delta$$

$$\Leftrightarrow d(x,y)+d(z,t) \le \max\{d(x,z)+d(y,t),\ d(y,z)+d(x,t)\} + 4\delta$$

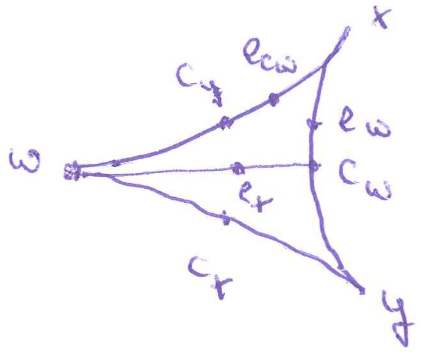
$\Leftrightarrow$ (*).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zeige: Wenn das Grom.-Prod. für alle $x \in X$ δ-hypeld. ist, dann sind alle geod. Dreiecke $3\cdot\delta$-schl.

Bew: Sei $[x, y, w]$ geod. Dreieck.

(*) Beh: $d(w, [x,y]) \leq (x \cdot y)_w + 2\delta$.

Seien c_x, c_y, c_w die intern. Pkte bzgl x, y, w und e_{c_w}, e_w, e_x intern. Pkte von $[w, x, c_w]$.



i.e. $|p^{-1}(p(P))| = 3$.

Dann ist $d(w, c_y) = (x \cdot y)_w$, $d(w, e_{c_w}) = (x \cdot c_w)_w$

$d(x, c_w) = d(x, c_y)$, $d(x, e_w) = d(x, e_{c_w})$

und $d(w, c_y) + d(c_y, e_{c_w}) = d(w, e_{c_w})$.

O.BdA $(x \cdot c_w)_w \leq (y \cdot c_w)_w$ und daher

$(x \cdot y)_w \geq (x \cdot c_w)_w - \delta$

$\Rightarrow$ $d(w, c_y) = \underbrace{d(w, e_{c_w})}_{=} - d(c_y, e_{c_w}) \geq \underbrace{(x \cdot c_w)_w}_{=} - \delta$

$\Rightarrow$ $d(e_{c_w}, c_y) \leq \delta$ und $d(c_w, e_w) \leq \delta$.

$= d(e_x, c_w)$

Daher folgt

$d(w, c_w) = d(w, e_x) + d(e_x, c_w) = d(w, e_{c_w}) + d(e_x, c_w)$

$= d(w, c_y) + d(c_y, e_{c_w}) + d(e_x, c_w)$

$\leq (x \cdot y)_w + 2\delta$

Nun sei $[x, y, z]$ geod. Dreieck in X, w auf $[x, y]$.

O.B.d.A $(x \cdot z)_w \le (y \cdot z)_w$.

Wegen $0 = (x \cdot y)_w \ge \min \{(x \cdot z)_w , (y \cdot z)_w\} - \delta$

folgt $(x \cdot z)_w \le \delta$ und es folgt

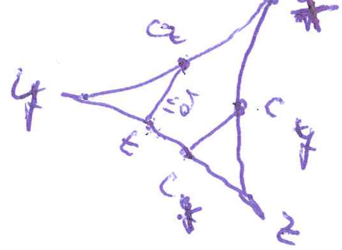
$$d(w, [x, z]) \underset{\text{Beh}(*)}{\le} (x \cdot z)_w + 2\delta \le 3\delta.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Zeige: Sind alle geod. Dreiecke δ-schlank, dann 6δ-dünn.

Sei $\Delta = [x, y, z]$ geod. Dreieck, also δ-schlank, und seien c_x, c_y, c_z die internen Punkte.

Beh: $\operatorname{diam}\{c_x, c_y, c_z\} \le 4\delta$.

Nach δ-Schlankh. ex $t \in [y, z] \cup [x, z]$ mit $d(c_z, t) \le \delta$.



Dann gilt oBdA $t \in [y, c_x]$

$\cancel{d(y,t) \ge d(y, c_z) \ge d(y, c_z) - \delta}$

und $d(y, c_z) - \delta \le d(y, t) \le d(y, c_z) + \delta$ nach Δ-$\neq$

und ebenso wegen $d(y, c_x) = d(y, c_z)$ auch

$d(y, c_x) - \delta \le d(y, t) \le d(y, c_x) + \delta$

Daher folgt

$$d(y, c_x) - d(t, c_x) = d(y, t) \ge d(y, c_x) - \delta$$

also $d(t, c_x) \le \delta$ und daher $d(c_x, c_z) \le 2\delta$

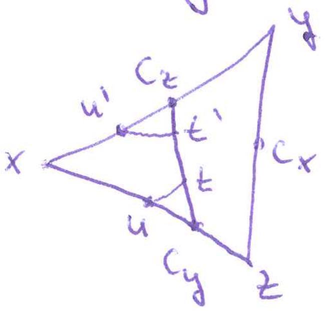
$\Rightarrow$ Beh.

Ebenso erhalten wir

$$d(c_y, c_z) \leq 2\delta \quad \text{und} \quad d(c_y, c_x) \leq 2\delta .$$

$\Rightarrow$ Beh.

Jetzt zeige: δ-schlank $\Rightarrow$ 6δ-dünn.



Sei $u \in [x, c_y]$, $u' \in [x, y]$ mit

$d(u, x) = d(u', x)$

Dann ist das Dreieck $[x, c_y, c_z]$ δ-schlank, daher ex $t \in [x, c_z] \cup [c_y, c_z]$ mit $d(u,t) \leq \delta$.

Wenn $t \in [x, c_z]$, dann folgt wie eben $d(t, u') \leq \delta$ und daher $d(u, u') \leq 2\delta$.

Sonst ist $t \in [c_y, c_z]$ und wir finden $t' \in [c_y, c_z]$ mit $d(u', t') \leq \delta$.

Nach voriger Beh. ist

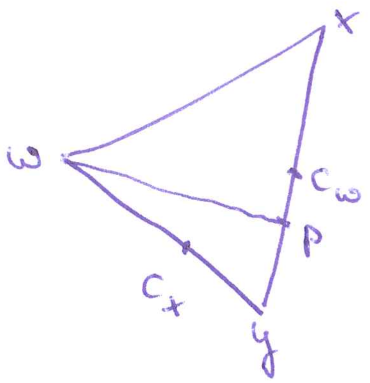
$$d(u, u') \leq d(u', t) + d(t, t') + d(t', u) \leq 6\delta . \qquad \square$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Vorbem.:

Für <u>alle</u> geod. Räume gilt

$$(x \cdot y)_w \leq d(w, [x,y])$$

<u>Bew:</u> Ang. es. ex $p \in [x,y]$ mit $d(w,p) < (x \cdot y)_w = d(w, c_y)$
$= d(w, c_x)$



O.BdA $p \in [c_w, y]$

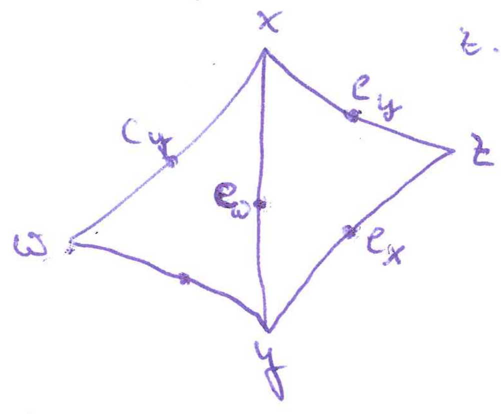
Dann ist

$$d(w,y) \leq d(w,p) + d(p,y) < d(w,c_x) + d(c_x, y) \quad ⚡.$$

Nun sei (X,d) geod. Raum, in dem alle geod. Dreiecke δ-dünn sind.

<u>Beh.</u> Das Grom.-Prod. für jedes $w \in X$ ist 3δ-hyperb.

z.z. $(x \cdot y)_w \geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\} - 3\delta$



Es ist $d(w, c_y) = (x \cdot y)_w$ und

$$d(w, c_w) \leq d(w, c_y) + \delta = (x \cdot y)_w + \delta$$

Es ist

$$d(w, e_w) + 2\delta \geq d(w, [x,z]) \geq (x \cdot z)_w$$

$$(x \cdot y)_w + 2\delta \geq d(w, c_w) + \delta \geq \min\{d(w, [x,z]), d(w, [y,z$$

Mit dem Vorbem. folgt

$$(x\cdot y)_w + 2\delta \geq \min\{(x\cdot z)_w, (y\cdot z)_w\}$$

und das war die Beh.

Def 3.13 Ein geod. metr. Raum (X,d), der die Bed. in 3.12 erfüllt heißt hyperbolisch.

Beobachtung: Geod. Graden in Bäumen streben sehr schnell auseinander.

Ist X metr. Raum, $y \in X$, $R \geq 0$, dann heißt $B_R(y)$ der Ball mit Radius R um y.

Def 3.14 Sei X geod. metr. Raum. Eine unbeschr Fkt $e: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Divergenz-Funktion für X, wenn für alle $x \in X$ geod. $\gamma = [x,y]$, $\eta = [x,z]$ in X für $y, z \in X$, für alle $r, R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $R + r \leq \min\{d(x,y), d(x,z)\}$ und $d(\gamma(R), \eta(R)) > e(0)$ und alle Wege p in $X \setminus B_{R+r}(x)$ von $\gamma(R+r)$ nach $\eta(R+r)$ gilt $l(p) > e(r)$.

Wenn eine Div. Fkt für X ex., sagen wir, dass Geod. in X divergieren. Wenn die Div. Fkt expon. ist, sagen wir, dass Geod. in X expon. divergieren.