Ziel: Hyperbol. ist QI invariante:

Zeige: Sind X, Y geod. Räume, Dreiecke in X δ-dünn, $f: X \to Y$ Q.I., dann sind Dreiecke in Y dünn.

Def 3.17 Sei X ein metr. Raum (i) Eine (λ, μ)-Quasi-Geod. ist eine (λ,μ)-q.i. Einbettung $c: J \to X$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ Interval (mögl. unbeschr.), d.h. es gilt für $t, t' \in J$

$$\frac{1}{\lambda} |t - t'| - \mu \leq d(c(t), c(t')) \leq \lambda |t - t'| + \mu$$

Für $J = [a,b]$ heißen $c(a), c(b)$ Endp. von c und falls $J = [0, \infty)$ dann heißt c q.geo. Strahl.

(ii) ~~Sind $x_1, x_2 \in X$ in derselben~~ Seien $x_1, x_2 \in X$
Eine stetige (λ,μ)-Quasi-Geod. von x_1 nach x_2 ist ein rektifiz. Weg p von x_1 nach p_2 so, dass für alle Teilwege q von p gilt.

$$l(q) \leq \lambda\, d(i(q), t(q)) + \mu$$

Lemma 3.18 Sei X geod. Raum. Ist $c: [a,b] \to X$ eine (λ, μ)-Q.Geod., dann ex eine stetige ~~(λ, μ')~~ (k_1, k_2)-Q.-Geod $c': [a,b] \to X$ derart, dass

(i) $c'(a) = c(a)$, $c'(b) = c(b)$

[(ii) $\mu' = 2(\lambda + \mu)$]

(iii) $l(c'|[t,t']) \leq k_1\, d(c'(t), c'(t')) + k_2$, $t, t' \in [a,b]$
$k_1 = \lambda(\lambda + \mu)$, $k_2 = (\lambda\mu' + 3)(\lambda + \mu)$

(iv) $\mathrm{im}(c) \subseteq B_{\lambda+\mu}(\mathrm{im}(c'))$ und $\mathrm{im}(c') \subseteq B_{\lambda+\mu}(\mathrm{im}(c))$

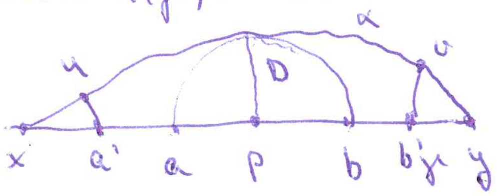
Bem: k_1, k_2 hängen nur von λ, μ ab!

Bew (Skizze, s. ÜA): Def. c' auf $\Sigma = \{a,b\} \cup (\mathbb{Z} \cap [a,b])$ als c und wähle geod. Wege in X zwischen diesen Punkten. Dann hat jedes dieser Stücke Länge $\leq \lambda + \mu$, und jeder Punkt von $\mathrm{im}(c) \cup \mathrm{im}(c')$ liegt in $B_{(\lambda+\mu)/2}(c(\Sigma))$. Verifiz. (i) – (iii) in Blatt 6.

Satz 3.19 Sei X hyperb. geod. Raum. Dann ex $L = L(\lambda,\mu)$, $M = M(\lambda,\mu)$ derart, dass für jede stetige (λ,μ)-Q-Geod α von x nach y gilt: Ist γ geod. Weg von x nach y, dann ist

$$\gamma \subset B_L(\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha \subset B_M(\gamma).$$

Bew: Sei e exp. Div. fkt für X und $D = \sup_{x \in \gamma} \{d(x,\alpha)\}$ und sei $p \in \gamma$ mit $d(p,\alpha) = D$.
Dann schneidet $\mathring{B}_D(p)$ nicht α. OBdA $l(\gamma) > 4D$.
Seien $a, b \in \gamma$, $d(a,p) = d(b,p) = D$



und $a', b' \in \gamma$, $d(a',p) = d(b',p) = 2D$ oder $a' = x$, $b' = y$.
Seien $u, v \in \alpha$ mit $d(a',u), d(b',v) \leq D$.
Dann ist $d(u,v) \leq 6D$ und weil α eine (λ,μ)-Q-Geod gilt $l_\alpha(u,v) \leq 6\lambda D + \mu$. Daher sind a, b durch einen Bogen in $X \setminus \mathring{B}_D(p)$ der Länge $\leq 4D + \lambda 6D + \mu$ verbunden.

Nach Def. der Div. fkt gilt

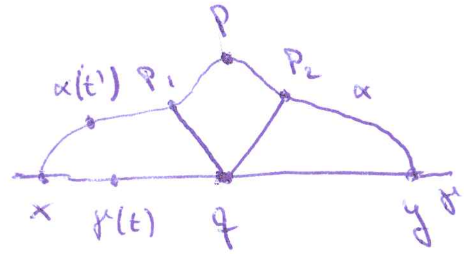
$$e\left(D - \frac{e(0)}{2}\right) < 4D + \lambda 6D + \mu.$$

Weil e exp. ist, muss D beschr. sein, d.h. L

hängt von X, λ, μ ab!

Nun suche M mit $\alpha \subset B_M(\gamma)$. Ang. $\alpha \not\subset B_L(\gamma)$.

Dann sei $p \in \alpha$ mit $d(p, \alpha) > L$. Für jedes $\gamma(t)$ ex $\alpha(t')$ mit $d(\gamma(t), \alpha(t')) \le L$. Dann liegt $\alpha(t)$ vor oder hinter p. Aus der Stetigkeit folgt, dass es $q \in \gamma$ gibt mit $p_1, p_2 \in \alpha$, $d(q, p_1) \le L$, $d(q, p_2) \le L$ und q zwischen p_1 und p_2.



Dann ist $d(p_1, p_2) \le 2L$ und daher $l_\alpha(p_1, p_2) \le \lambda 2L + \mu$.

Daher ist $d(p, \gamma) \le L\lambda + \frac{\mu}{2} + L$.

Wähle $M = L\lambda + \frac{\mu}{2} + L$.

<u>Kor</u> 3.20 Sind X, Y geod. Räume, q.i., X hyperb., dann auch Y.

<u>Bew:</u> Z.z. es ex δ' derart, dass geod. Dreiecke in Y δ'-dünn sind. Sei $f: X \to Y$ eine (λ, μ)-Q.I.

Seien $x', y', z' \in Y$ und $x'' = f(x)$, $y'' = f(y)$, $z'' = f(z)$ derart, dass $d(x'', x')$, $d(y', y'')$, $d(z', z'') \le \mu$.

Betrachte das geod Dr. $[x, y, z]$ in X. Ist $[x, y, z]$ δ-dünn, dann ist $[x, y] \subseteq B_\delta([y, z]) \cup B_\delta([x, z])$.

$f[x, y]$ ist Q-Geod. von x'' nach y''. Daher ~~sind~~ $f[\cancel{x, y}]$ ~~sind~~ die $(1, 2\mu)$-Q-Geod (x', x'', y'', y') beides enthalten in $B_L([x', y']) \subseteq B_{\lambda\delta + 2\mu}([y', z']) \cup B_{\lambda\delta + 2\mu}([x', z'])$.

Jetzt kehren wir zu Gruppen zurück:

Def 3.21 Sei $G = \langle S \rangle$ eine endl. erz. Gr. Dann heißt G hyperbol., wenn $\Gamma_S(G)$ hyperb. ist als metr. Raum.

Bsp: Freie Gr. sind hyperb., endl. Gr. sind hyperb.

Diese Eigenschaft hängt nicht von der Erz. menge S ab:

Prop. 3.22 Seien S_1, S_2 endl. Erz.mengen für eine Gr. G. Dann sind $\Gamma_{S_1}(G)$ und $\Gamma_{S_2}(G)$ q.i.

Bew: Beh: Die Abb $id: G \to G$ ist Q.I.

Sei $S_1 = \{a_1, .. a_n\}$, $S_2 = \{b_1, .. b_m\}$. Dann ist jedes a_i darstellbar als Wort über S_2, $a_i = w_i$, $\lambda = \max_{i \le n} |w_i|$. Dann ist $d_{S_1}(g,h) = |gh^{-1}|_{S_1} \le \lambda |gh^{-1}|_{S_2}$

$= \lambda\, d_{S_2}(g,h)$.

Bem: Es folgt aus dem Bew. von Satz 1.12, dass gilt: Ist $H \le G$, $[G:H]$ endl., dann sind G und H q.i. (vgl. ÜA Blatt 6)

Erinnerung Def 2.7 Ist $G = \langle S \mid R \rangle$ endl. präs., $w \in F(S)$ mit $\bar{w} = 1_G$, dann ist

$$A(w) = \min \{ n \mid w = \prod_{i=1}^{n} t_i r_i^{\pm} t_i^{-1} \}.$$

Def 3.23 Ist $G = \langle S \mid R \rangle$ endl. präs., dann heißt $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Dehn-Fkt (oder isoperim. Fkt) für G, falls für alle $w \in F(S)$ mit $\bar{w} = 1_G$ gilt

$$A(w) \le f(|w|).$$

G ~~erfüllt~~ eine linear, quadr., exp isoperimet.

Ungleichung, wenn die zugeh. Dehn-Fkt das erfüllt.

Bsp: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ erfüllt quadr. isoperim. Ungl., nicht lin.

(ÜA) Freie Gr. haben lin. isoper. Ungl.

Satz 3.24 Wenn eine endl. präs. Gr. $G = \langle S \mid R \rangle$ eine lin. isoper. Ungl. erfüllt, dann ist G hyperbolisch.