Ungleichung, wenn die zugeh. Dehn-Fkt das erfüllt.

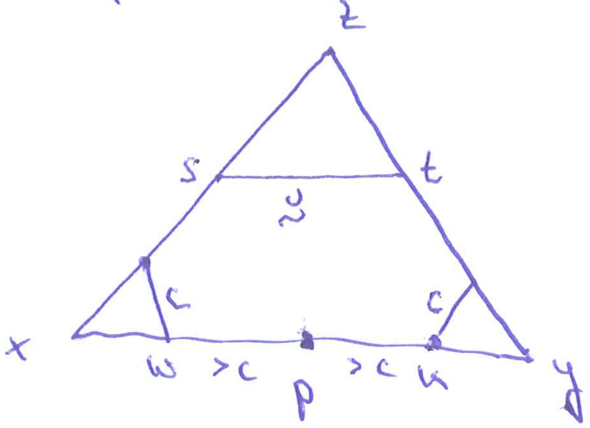
Bsp: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ erfüllt quadr. isoperim. Ungl., nicht lin.

(ÜA) Freie Gr. haben lin. isoper. Ungl.

Satz 3.24 Wenn eine endl. präs. Gr. $G = \langle S \mid R \rangle$ eine lin. isoper. Ungl. erfüllt, dann ist G hyperbolisch.

Bew: Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ mit $A(|w|) \leq K|w|$ für $w \in F(S)$ mit $\bar{w} = 1_G$. Sei $r = \max\{|w| \mid w \in R\}$ und $c > K \cdot r^2 \cdot 24$

Wenn G nicht hyperb. ist, dann gibt es für alle $c > 0$ geod. Dreiecke, die nicht c-schl. sind. Sei also $[x, y, z]$ geod. Dreieck nicht $2c$-schlank.



Sei etwa $p \notin B_{2c}([z y]) \cup B_{2c}([x, z])$

Seien $u, w \in [x, y]$ mit $d(w, [x, z]) = d(u, [y, z]) = c$ und $d(u, p)$, $d(w, p)$ min.

Seien $s \in [x, z]$, $t \in [z, y]$ mit $d(s, t) = 2c$ $d(s, x)$, $d(t, y)$ min.

Sei $l > 2c$ max Seitenlänge dieses

Hexagons H. Sei D min. van-Kampen Diagr. für H. Dann ist $l(\partial D) \leq 6l$ und $A(D) < K6l$. Ist L die längste Seite von H, dann ist

$$A(\mathrm{star}(L)) \geq \frac{l}{r} \quad \text{und für } L_1 = \partial(\mathrm{star}(L)) - \partial H$$

gilt $l(L_1) \geq l - 2r$, weil L geodät.

Durch $12Kr$-faches Iterieren erhalten wir

$$A(\mathrm{star}^{12Kr}(L)) \geq \frac{l}{r} + \frac{l-2r}{r} + \cdots + \frac{l-24Kr^2}{r}$$

$$\geq 12Kr\Big(\underbrace{\frac{l-24Kr^2}{r}}_{\geq \frac{1}{2}\frac{l}{r}}\Big) > 6Kl \;\lightning.$$

<u>Satz</u> 3.25 Hyperb. Gr. erfüllen eine lin. isoper. Ungleichung.

<u>Bew</u>: Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ hyperb., δ so, dass Dreiecke im Cayley-Graph δ-dünn sind, $\delta \in \mathbb{N}$. Sei

$$K = \max\{A(w) \mid |w| \leq 10\delta, \overline{w} = 1_G\}.$$

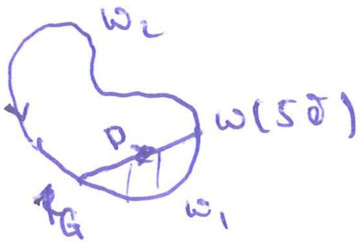
<u>Beh</u>: Es gilt $A(w) \leq K|w|$ für alle $w \in F(S)$ mit $\overline{w} = 1_G$.

<u>Bew</u> durch Ind. über $|w|$. Klar für $n = |w| \leq 10\delta$. Sei nun die Beh. bew. für $|w| \leq n$ und $|w| = n+1$ mit $\overline{w} = 1_G$.

Fall 1 Wenn für alle Vert. $w(i)$ in w gilt

$d(w(i), 1_G) < 5\delta$.

Sei p geod. Weg von e nach $w(5\delta)$.



$|w_1 p^{-1}| < 10\delta$

$|p\, w_2| < |w|$

Dann ist $w = w_1 p^{-1} p\, w_2$ und nach Ind.

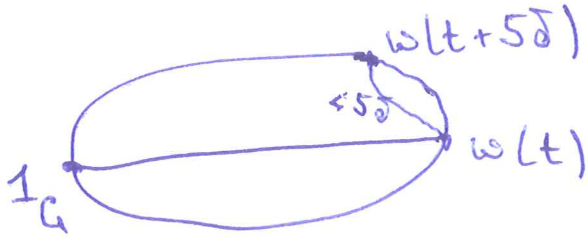
ist $A(w) \leq A(w_1 p^{-1}) + A(p w_2) \leq K + Kn = K(n+1)$

$= K|w|$

Fall 2 Fall 1 gilt nicht und für $w(t)$ mit

$d(w(t), 1_G)$ max gilt $d(w(t), w(t-5\delta)) < 5\delta$

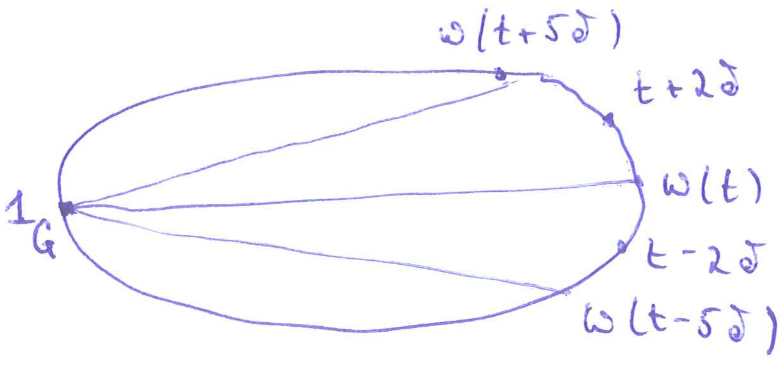
oder $d(w(t), w(t+5\delta)) < 5\delta$



Dann argumentiere wie in Fall 1.

Fall 3 Keiner dieser Fälle 1 und 2.

Dann betrachte



=

Betrachte die geod. Dreiecke $[1_G, w(t), w(t+5\delta)]$ und $[1_G, w(t), w(t-5\delta)]$. Aus der δ-Dünnheit folgt $d(w(t-2\delta), w(t+2\delta)) \leq 2\delta$.

Nun argumentiere wie vorher.

Kor 3.26 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist nicht hyperb.

Bew ÜA.

Kor 3.27 Das Wort-Problem in endl. erz. hyperb. Gr. ist entsch. Genauer: Hyperb. Gr. haben eine Dehn-Präsent.

Bew: Der Bew. von 3.25 zeigt, dass für $G = \langle S \rangle$ die Präsent. $G = \langle S \mid R \rangle$ mit

$$R = \{ w \in F(S) \mid |w| \leq 10\delta, \bar{w} = 1_G \}$$

eine Dehn-Präsent. ist.

Kor 3.28 Endl. erz. hyperb. Gr. sind endl. präsentiert.

Bew: Folgt aus dem Bew. von 3.27.

Satz 3.29 Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ eine Gr., die $C(7)$ (oder $C'(\frac{1}{6})$) erfüllt. Dann ist G hyperb.

Bew: Genügt z.z., dass G eine lin. isoper. Ungl. erfüllt.