Fraïssé-Amalgamierung

Miriam Adleff

30. April 2020

Definitionen

Definition 1

Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Sprache.
Das *Alter* oder *Skelett* $\mathcal{K}$ von einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ ist die Klasse von endlich-erzeugten $\mathcal{L}$-Strukturen, die isomorph zu einer Unterstruktur von $\mathfrak{M}$ sind.

$$age(\mathfrak{M}) := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' \leq_{end-erz.} \mathfrak{M}\}$$

Definition 2

Wir nennen eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ $\mathcal{K}$*-saturiert*, wenn $\mathfrak{M}$ das Alter $\mathcal{K}$ hat und für alle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $f_0 : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{M}$, $f_1 : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ eine Einbettung $g_1 : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{M}$ existiert, sodass gilt $f_0 = g_1 \circ f_1$.

Theorem 3

Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache.
Zwei abzählbare $\mathcal{K}$-saturierte Strukturen sind isomorph.

Beweis.

mit der Hin-und-Her-Argumentation:
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ $\mathcal{K}$-*saturiert*, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{M}$ *endlich-erzeugt.*
$f_0 : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ *mit der* $\mathcal{K}$-*Saturiertheit folgt, dass* f_0 *zu* $g_1 : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{N}$ *erweitert werden kann, wobei* $\mathfrak{B} = < \mathfrak{A}a >^{\mathfrak{M}}$ *und a beliebig.* $\square$

Folgerung 4

Der Beweis zeigt, dass jede abzählbare $\mathcal{K}$-*saturierte* $\mathcal{L}$-*Struktur* $\mathfrak{M}$ ultrahomogen *ist, d.h. jeder Isomorphismus zwischen endlich-erzeugten Unterstrukturen, kann zu einem Automorphismus von* $\mathfrak{M}$ *erweitert werden.*

Theorem 5

Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und $\mathcal{K}$ eine abzählbare Klasse von endlich-erzeugten $\mathcal{L}$-Strukturen.
Es existiert eine abzählbare $\mathcal{K}$-saturierte $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn:

- (Heredity)
  Wenn $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, dann gilt $age(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{K}$.
- (Joint Embedding)
  Für $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$ existiert $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $g_i : \mathfrak{B}_i \hookrightarrow \mathfrak{D}$.
- (Amalgamation)
  Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$ und $f_i : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}_i$ Einbettungen, existieren $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ und Einbettungen $g_i : \mathfrak{B}_i \hookrightarrow \mathfrak{D}$, sodass $g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1$ gilt.

*Dann ist $\mathfrak{M}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt **Fraïssé-Limes**.*

Beweis.

$\Rightarrow$ Sei $\mathcal{K} = \text{age}(\mathfrak{M})$ das Alter einer abzählbaren $\mathcal{K}$-saturierten $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$. *Heredity:*

$\mathfrak{A} \in \text{age}(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{B} \in \text{age}(\mathfrak{A})$, dann gilt $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{M}$.
Also $\mathfrak{B} \in \text{age}(\mathfrak{M}) = \mathcal{K}$.

Joint Embedding:

$\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \text{age}(\mathfrak{M})$, $g_i : \mathfrak{B}_i \hookrightarrow \mathfrak{M}$.
Setze $\mathfrak{D} := < g_0(\mathfrak{B}_0) \cup g_1(\mathfrak{B}_1) >^{\mathfrak{M}} \leq \mathfrak{M}$, dann $g_i : \mathfrak{B}_i \hookrightarrow \mathfrak{D}$.

Amalgamation:

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \text{age}(\mathfrak{M})$, $f_i : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}_i$ Einbettungen.
Angenommen $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_1$, dann sind f_0, f_1 Inklusionen.
$g_1 : \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathfrak{M}$ Einbettung ist eine Erweiterung von $f_0 : \mathfrak{A} \hookrightarrow f_0(\mathfrak{A})$, außerdem gilt $f_0 = g_1 \circ f_1$ und somit bleibt die $\mathcal{K}$-Saturiertheit erhalten.
Setze $\mathfrak{D} := < \mathfrak{B}_0 \cup g_1(\mathfrak{B}_1) >^{\mathfrak{M}} \leq \mathfrak{M}$. Dann ist $g_0 : \mathfrak{B}_0 \hookrightarrow \mathfrak{D}$ Inklusion.

Beweis.

$\Leftarrow$ Wir wählen ein Aufzählung $(\mathfrak{B}_i)_{i\in\omega} \subseteq \mathcal{K}$, sodass gilt $\forall \mathfrak{B} \in \mathcal{K}. \exists i \in \omega. \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_i$.

Wir konstruieren eine aufsteigende Kette

$$\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{M}$$

von Elementen aus $\mathcal{K}$.

Sei $\mathfrak{M}_k$ schon konstruiert.

i=2n: Mit *Joint Embedding* lässt sich $\mathfrak{M}_{k+1}$ finden, sodass

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M}_{k+1} & \\
\mathfrak{M}_k \arrow[ur, "g_0"] & & \mathfrak{B}_n \arrow[ul, "g_1"']
\end{tikzcd}$$

wobei g_0 eine Inklusion ist, also gilt $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_{i+1}$.

Beweis.

i=2n+1: Wähle abzählbare Menge P von Paaren $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, sodass $\forall \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}' \in \mathcal{K}. \exists (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{P}. \exists f : \mathfrak{B}' \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$ mit $f(\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}$
Sei $\xi : \omega \times \omega \to \omega$ eine Bijektion mit $\xi(i,j) \geq i \; \forall i,j \in \omega$.
Sei $(f_{kj}, \mathfrak{A}_{kj}, \mathfrak{B}_{kj})$ eine Aufzählung von Tripeln $(f_0, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{P}$ und $f_0 : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{M}_k$.
Dann existiert nach *Amalgamation* $\mathfrak{M}_{k+1} \in \mathcal{K}$, sodass für $k = \xi(i,j)$ die Einbettung $f_{ij} : \mathfrak{A}_{ij} \hookrightarrow \mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}_k$ zu $g_{ij} : \mathfrak{B}_{ij} \hookrightarrow \mathfrak{M}_{k+1}$ erweitert werden kann.

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{M}_{k+1} & \\
\mathfrak{M}_k \arrow[ur, "g_0"] & & \mathfrak{B} \arrow[ul, "g_1"'] \\
& \mathfrak{A} \arrow[ul, "f_0"] \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann ist g_0 eine Inklusion und die $\mathcal{K}$-Saturiertheit bleibt erhalten .

Beweis.

$\mathcal{K} = \mathrm{age}(\mathfrak{M})$, denn:

- jede endlich-erzeugte Unterstruktur von $\mathfrak{M}$ ist Unterstruktur von einem $\mathfrak{M}_i$. Da $\mathfrak{M}_i \in \mathcal{K}$, sind auch deren Unterstrukturen Elemente von $\mathcal{K}$.
- Andersrum gilt, jedes $\mathfrak{B}_n \in \mathcal{K}$ ist isomorph nach Konstruktion zu $\mathfrak{M}_{2n+1}$.

Eindeutigkeit folgt nach Theorem 3.

□

Wir betrachten nun den Fall einer endlichen und relationalen Sprache $\mathcal{L}$.
Hier gilt: Jede nicht-leere endliche Teilmenge ist selbst eine Unterstruktur.
Die bisherige betrachtete Konstruktion erzeugt in diesem Fall eine $\aleph_0$-kategorische Struktur.

Sei $\mathcal{L}$ ab jetzt eine **endlich relationale** Sprache.

Lemma 6

Eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie T mit Quantorenelimination ist $\aleph_0$-kategorisch.

Beweis.

Für jedes $n \in \omega$ gibt es bis auf Äquivalenz nur endlich viele quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formeln in Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Dann folgt $\aleph_0$-Kategorizität nach Ryll-Nardzewski. $\square$

Bemerkung 7

Aus dem Lemma folgt auch, dass alle Modelle von T ω-homogen *sind, im folgendem Sinne.*

Definition 8

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ heißt ω-*homogen*, wenn für jede elementare Abbildung $f_0 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{A} \leq_{endl.} \mathfrak{M}$ und jedes $a \in \mathfrak{M}$ ein $b \in \mathfrak{M}$ existiert, sodass

$$f = f_0 \cup \{< a, b >\} \text{ elementar} \quad (\Leftrightarrow \text{b realisiert } f_0(tp(a/\mathfrak{A})))$$

Lemma 9

Sei T eine vollständige Theorie und $\mathfrak{M}$ ein unendliches Modell von T.
Dann sind äquivalent:

a. T *hat Quantorenelimination.*
b. *Jeder Isomorphismus zwischen endlichen Unterstrukturen von $\mathfrak{M}$ ist elementar.*
c. *Die Definitionsmenge jedes Isomorphismus, zwischen endlichen Unterstrukturen von $\mathfrak{M}$, kann zu jedem Element erweitert werden.*

Beweis.

Sei $\mathfrak{M}$ ein unendliches Modell von T einer vollständigen Theorie.

a)⇒b) klar

b)⇒a) Wir nehmen b) an. Dann realisieren alle n-Tupel $\bar{a}$, welche

$$tp_{qf}(\bar{a}) = \{\psi(\bar{x}) \mid \mathfrak{M} \models \psi(\bar{a}),\ \psi(\bar{x})\ \mathit{quantorenfrei}\}$$

realisieren die gleichen primitiv existentiellen Formeln. Wir zeigen:

> Jede primitiv existentielle Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y.\, \rho(x_1, \dots, x_n, y)$ ist äquivalent modulo T zu einer quantorenfreien Formel.

Seien $r_1(\bar{x}), \dots, r_{k-1}(\bar{x})$ die quantorenfreien Typen von allen n-Tupeln in $\mathfrak{M}$, welche $\varphi(\bar{x})$ realisieren. Sei $\rho_i(\bar{x})$ äquivalent zu der Konjunktion von allen Formeln der $r_i(\bar{x})$. Dann gilt

$$\mathrm{T} \vdash \forall \bar{x}.\, (\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \bigvee_{i<k} \rho_i(\bar{x}))$$

Beweis.

Sei $\mathfrak{M}$ ein unendliches Modell von T einer vollständigen Theorie.

a)⇒c) Die Theorie T ist $\aleph_0$-kategorisch und somit sind alle Modelle von T ω-homogen.
c) folgt nun mit der ω-Homogenität und der Äquivalenz von a) und b).

c)⇒b) Man sieht leicht, dass jeder endliche Isomorphismus elementar ist, wenn sich die Definitionsmenge dieser zu jedem weiteren Element erweitern lässt.

□

Wir haben nun insgesamt gezeigt:

Sei $\mathcal{L}$ eine **endliche relationale** Sprache.

Theorem 10

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von endlichen $\mathcal{L}$-Strukturen.
Wenn der Fraïssé-Limes von $\mathcal{K}$ existiert, dann ist die Theorie des Limes $\aleph_0$-kategorisch und besitzt Quantorenelimination.

Selbige Aussage lässt sich auch für eine allgemeinere endliche Sprachen machen.
In diesem Fall brauchen wir weitere Anforderungen an die Klasse, um die Größe der Strukturen unter Kontrolle zu halten.

Sei $\mathcal{L}$ ab jetzt eine **endliche** Sprache.

Definition 11

Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt *uniform lokal endlich*, wenn eine Funktion $f : \omega \to \omega$ existiert, sodass

> für jede Unterstruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gilt, wenn $\mathfrak{B}$ einen Erzeuger mit $\leq n$ Elementen hat, dann hat $\mathfrak{B}$ selbst eine Kardinalität $\leq f(n)$.

Eine Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen heißt *uniform lokal endlich*, wenn eine Funktion $f : \omega \to \omega$ existiert, sodass jede Struktur $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ uniform lokal endlich ist.

Definition 12

Eine Struktur $\mathfrak{D}$ heißt *schwach homogen*, wenn für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ endlich-erzeugte Unterstrukturen von $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $f : \mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ Einbettung, eine Einbettung $g : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ existiert.

Theorem 13

Sei $\mathcal{L}$ eine endliche Sprache und $\mathcal{K}$ eine abzählbare uniform lokal endliche Klasse von endlich-erzeugten $\mathcal{L}$-Strukturen mit den Eigenschaften Heredity, Joint Embedding *und* Amalgamation.
Sei $\mathfrak{M}$ der Fraïssé-Limes von $\mathcal{K}$ und $\mathrm{T} = Th(\mathfrak{M})$ die Theorie von $\mathfrak{M}$. Dann gilt:

- T *ist $\aleph_0$-kategorisch.*
- T *hat Quantorenelimination.*

Beweis.

$\aleph_0$-Kategorizität:
Hierzu konstruieren wir eine $\mathcal{L}$-Theorie U, sodass jedes abzählbare Modell schwach homogen ist und Alter $\mathcal{K}$ hat. Außerdem sei U ein Axiomensystem für T.

Wir halten zwei Fakten fest:

- $\mathfrak{A} = < a_1, \ldots, a_n >$, dann ex. qf $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\bar{x}) = \psi_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x})$, sodass für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ gilt:

$$\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b}) \Leftrightarrow \exists f : \mathfrak{A} \overset{\cong}{\to} < \bar{b} >^{\mathfrak{B}}, \, sd. \, f(\bar{a}) = \bar{b}$$

  Genauer $\psi_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \bigwedge\{\psi(\bar{x}) \,|\, \psi(\bar{x}) \, basic, \, \mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})\}$

- Mit uniform lokaler Endlichkeit folgt:
  Für $n \in \omega$ gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele $\mathcal{L}$-Strukturen mit n Erzeugern.

Beweis.

$\aleph_0$-Kategorizität:

Sei U_0 die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen der Form

$$\forall \bar{x}.\, (\psi_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x}) \to \exists y.\, \psi_{\mathfrak{B},\bar{a}b}(\bar{x}, y)) \tag{1}$$

und U_1 die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen der Form

$$\forall \bar{x}.\, \bigvee_{\mathfrak{A},\bar{a}} \{\psi_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x}) \,|\, \mathfrak{A} \in \mathcal{K},\, \mathfrak{A} =< \bar{a} >\} \tag{2}$$

Sei U nun $\mathrm{U}_0 \cup \mathrm{U}_1$, dann hat jedes Modell $\mathfrak{D} \models \mathrm{U}$ das Alter $\mathcal{K}$. Denn U_0 impliziert mit dem Fall $\bar{a}$ leer, dass $\mathcal{K} \subseteq age(\mathfrak{D})$ und U_1, dass $age(\mathfrak{D}) \subseteq \mathcal{K}$.

Sei nun $\mathfrak{D}$ ein abzählbares Modell von U. Über Induktion der Eigenschaft (1) von U_0 erhält man, dass $\mathfrak{D}$ schwach homogen ist.

Da offensichtlich auch $\mathfrak{M} \models \mathrm{U}$, sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{M}$ $\mathcal{K}$-saturiert und somit nach Theorem 3 isomorph.

Also ist U $\aleph_0$-kategorisch.

Beweis.

Quantorenelimination:

Sei $\phi(\bar{x})$ eine $\mathcal{L}$-Formel mit einem nicht-leeren Tupel von Variablen und

$$X = \{\bar{a} \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a})\}$$

Sei $\bar{a} \in$ X und $\bar{b}$, sodass $e :< \bar{a} >^{\mathfrak{M}} \rightarrow < \bar{b} >^{\mathfrak{M}}$ Iso. mit $e(\bar{a}) = \bar{b}$, dann kann e zu einem Automorphismus von $\mathfrak{M}$ erweitert werden und $\bar{b} \in$ X. Es folgt

$$\phi(\bar{x}) \longleftrightarrow_{\mathrm{T}} \bigvee_{\bar{a} \in X} \psi_{<\bar{a}>,\bar{a}}(\bar{x})$$

Also hat T Quantorenelimination. $\square$

Korollar 14

Sei $\mathfrak{M}$ eine abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur.
Dann sind äquivalent:

- (a) $\mathfrak{M}$ *ist* ultrahomogen *und* uniform lokal endlich.
- (b) $\mathrm{T} = Th(\mathfrak{M})$ *ist* $\aleph_0$*-kategorisch und hat Quantorenelimination.*

Beweis.

a)⇒b) Sei $\mathcal{K}$ das Alter von $\mathfrak{M}$, dann ist $\mathcal{K}$ uniform lokal endlich und erfüllt die Eigenschaften HP, JEP, AP.
Nun folgt nach Theorem 13 die Behauptung.

b)⇒a) uniform lokal endlich:
Mit Ryll-Nardzewski lässt sich zeigen, dass Aut($\mathfrak{M}$) oligomorph ist.
Um eine geeignete Funktion zu finden seien $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_{k-1}$ Repräsentanten dieser Bahnen.
Setzte $m_i = | < \bar{b}_i > |$. Diese m_i sind endlich, da:

> Sei $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ ein n-Tupel und $\mathfrak{A} =< \bar{a} >^{\mathfrak{M}}$. Seien c, d $\in \mathfrak{A}$ unterschiedlich. Dann sind tp($\bar{a}c$) und tp($\bar{a}d$) über der leeren Menge unterschiedlich. Somit ist $\mathfrak{A}$ nach Ryll-Nardzweski endlich.

Dann kann man f(n) $= max\{m_i \,|\, i < k\}$ setzten.

Beweis.

b)$\Rightarrow$a) ultrahomogen:
Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei isomorphe $\mathcal{L}$-Unterstrukturen von $\mathfrak{M}$ mit n Erzeugern, also $\mathfrak{A} = <\bar{a}>$, $\mathfrak{B} = <\bar{b}>$ und $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ mit f$(a_i) = b_i \, \forall i$.
Wir konstruieren nun eine Kette von Isomorphismen.

$\overset{\aleph_0-kat.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ $\mathcal{L}$-Formel $\phi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, welche den Typ $tp(a_1, \ldots, a_{n+1})$ isoliert.
Dann impliziert
$tp(a_1, \ldots, a_n)$, dass $\exists x_{n+1}.\, \phi(a_1, \ldots, a_n, x_{n+1})$

$\overset{QE}{\Longrightarrow}$ f elementar und somit gilt $tp(\bar{a}) = tp(\bar{b})$,
dann impliziert
$tp(b_1, \ldots, b_n)$, dass $\exists x_{n+1}.\, \phi(b_1, \ldots, b_n, x_{n+1})$
Sei b_{n+1} dieses x_{n+1}, dann gilt
$tp(a_1, \ldots, a_{n+1}) = tp(b_1, \ldots, b_{n+1})$.
Setzte f$(a_{n+1}) = b_{n+1}$.

DLO

Sei $\mathcal{L}_< = \{<\}$ die Sprache der Ordnung. DLO ist die Theorie der dichten linearen Ordnung ohne Endpunkte

$$\begin{aligned} DLO := \{\forall x, y, z.\ & \wedge (\neg x < x \wedge (x < y \vee x \doteq y \vee y < x) \\ & \wedge ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \\ & \wedge (x < y \to \exists w. (x < w \wedge w < y)) \\ & \wedge \exists w. w < x \wedge \exists w. x < w)\} \end{aligned}$$

Behauptung

$(\mathbb{Q}; <) \models DLO$ *ist der Fraïssé-Limes von der Klasse* $\mathcal{K} = \{$*endlich lineare Ordnung*$\}$

DLO

Beweis.

$\mathcal{K}$ besitzt die Eigenschaften:

- *Heredity:* Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Jede Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist wieder eine endliche lineare Ordnung und somit $\in \mathcal{K}$.
- *Joint Embedding:* Seien $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$. Wähle $\mathfrak{D}$, als ordnungserhaltende disjunkte Vereinigung von $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$.
  Für die Ordnung in $\mathfrak{D}$ setze $\mathfrak{B}_0 < \mathfrak{B}_1$.
  Dann sind g_0, g_1 Inklusionen.

DLO

Beweis.

$\mathcal{K}$ besitzt die Eigenschaften:

- *Amalgamation:* Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{A} = < a_1, \ldots, a_n >$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ und $\mathfrak{B}_0 = <\mathfrak{A}x>$ mit einem beliebigen x. Nun betrachten wir genau, wie man x platzieren muss, sodass eine Ordnung erhalten bleibt:

1.Fall $x < a_1$ setzte auch $x < b_i \; \forall b_i \in \mathfrak{B}_1$
2.Fall $a_n < x$ setzte auch $b_i < x \; \forall b_i \in \mathfrak{B}_1$
3.Fall $a_i < x < a_{i+1}$ setzte $x < b_j \; \forall b_j . \, a_i < b_j < a_{i+1}$

$\mathfrak{D}$ sei dann die entsprechende Ordnung auf der Vereinigung von $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$.

Somit besitzt $\mathcal{K}$ einen Fraïssé-Limes.
Es ist leicht anhand dieser Konstruktionsbedingungen auf die dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte zu schließen, also ist $(\mathbb{Q}; <) \models$ DLO der Fraïssé-Limes der Klasse $\mathcal{K}$. $\square$

Zufallsgraphen

Sei $\mathcal{L}_R = \{R\}$ eine Sprache, mit einem zweistelligen Relationssymbol R. T_{ZG} ist die Theorie des Zufallsgraphen.

$$\mathrm{T}_{ZG} = \{\forall x.\, \neg xRx \,\wedge\, \forall x, y.\, xRy \leftrightarrow yRx \,\wedge\, \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m.$$

$$\bigwedge_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} x_i \neq y_j \to (\exists z.\, \bigwedge_{i=1}^{n} zRx_i \,\wedge\, \bigwedge_{j=1}^{m} \neg zRy_j)\}$$

Behauptung

Der abzählbare Zufallsgraph ist der Fraïssé-Limes von der Klasse $\mathcal{K} = \{\textit{endliche Graphen}\}$.

Zufallsgraphen

Beweis.

$\mathcal{K}$ besitzt die Eigenschaften:

- *Heredity:* Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Jede Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist wieder ein endlicher Graph und somit $\in \mathcal{K}$.
- *Joint Embedding:* Seien $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$. Setzte $\mathfrak{D}$, sodass $V_{\mathfrak{D}} = V_0 \dot\cup V_1$ und $E_{\mathfrak{D}} = E_0 \dot\cup E_1$
- *Amalgamation:* Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}$ die größte gemeinsame Teilmenge. Setzte dann $\mathfrak{D}$ als disjunkte Vereinigung der Kanten und Knoten. Dann gilt $\neg xRy$ für alle $x \in \mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{A}$ und alle $y \in \mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{A}$

Somit besitzt K einen Fraïssé-Limes.

$\square$

$\mathbb{K}$-Vektorräume

Wir betrachten den Fall der endlichen $\mathbb{K}$-Vektorräume, wo $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper ist.
Sei $\mathcal{L}_{\mathbb{K}-VR} = \{0, +, -, \mu_k\}_{k \in \mathbb{K}}$ die Sprache der $\mathbb{K}$-VR, wobei μ_k die Skalaremultiplikation mit k darstellt.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{\mathbb{K}-VR} =& [\text{Axiome abelscher Gruppen}] \\
& \cup \{\forall v, w.\, \mu_k(v + w) = \mu_k(v) + \mu_k(w) \\
& \quad \wedge \forall v.\, \mu_{k_1+k_2}(v) = \mu_{k_1}(v) + \mu_{k_2}(v) \\
& \quad \wedge \forall v.\, \mu_{k_1 k_2}(v) = \mu_{k_1}(\mu_{k_2}(v)) \\
& \quad \wedge \forall v.\, \mu_1(v) = v\}
\end{aligned}$$

Behauptung

Der Fraïssé-Limes der Klasse $\mathcal{K} = \{$*endlich dimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum*$\}$ *ist die abzählbare unendliche Vereinigung aller* $\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}$-Vektorräume

Beweis.

$\mathcal{K}$ besitzt die Eigenschaften:

- *uniform lokal endlich:* Es gilt, dass ein $\mathbb{K}$-VR mit einer n-elementigen Basis, selbst $|\mathbb{K}|^n$ Elemente hat.
  Somit setzte $f : \omega \to \omega$, sodass f(n) $= |\mathbb{K}|^n$. $\mathcal{K}$ ist dann mit diesem f uniform lokal endlich.

$\mathbb{K}$-Vektorräume

Beweis.

$\mathcal{K}$ besitzt die Eigenschaften:

- *Heredity:* Sei $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Jede Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist ein Untervektorraum, insb. ein Vektorraum und somit $\in \mathcal{K}$.
- *Joint Embedding:* Seien $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$.
  Wir bringen erst die Erzeuger auf die gleiche Dimension. Dann bildet die disjunkte Vereinigung der Erzeugern eine neue Struktur in $\mathcal{K}$.
- *Amalgamation:* Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1 \in \mathcal{K}$, sodass Einbettungen $f_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ existieren.
  Wir können annehmen, dass $\mathfrak{A}$ der größte gemeinsame Untervektorraum ist.
  Nun bildet wieder die disjunkte Vereinigung der Erzeuger eine neue Struktur.

Somit besitzt K einen Fraïssé-Limes. $\square$