Überblick über das Seminar zur Hrushovski-Amalgamierung

Martin Hils

23. April 2020

Prägeometrien

Erinnerung:

- Ein **Abschlussoperator** auf einer Menge X ist eine Abbildung $cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, sodass für alle $A \subseteq X$ gilt:

$$A \subseteq cl(A) = cl(cl(A)) = \bigcup \{cl(A_0) \mid A_0 \subseteq A \text{ endlich}\}$$

  Gilt zudem das Steinitzsche Austauschlemma

$$b \in cl(A \cup \{c\}) \setminus cl(A) \Rightarrow c \in cl(A \cup \{b\}),$$

  induziert cl eine (kombinatorische) **Prägeometrie**.
- Beispiele von Prägeometrien: lineare Abhängigkeit in einem Vektorraum, algebraische Abhängigkeit in einem Körper
- In jeder Prägeometrie definiert man wie üblich die Begriffe *Erzeugendensystem*, *unabhängige Menge*, *Basis*, *Dimension* (Kardinalität einer Basis, unabh. von der Wahl der Basis)...

Die Prägeometrie einer streng minimalen Menge

- Sei M eine $\mathcal{L}$-Struktur. Eine unendliche definierbare Menge $\varphi[M] \subseteq M^n$ heißt **streng minimal**, falls für alle $M \preccurlyeq N$ jede $\mathcal{L}_N$-def.bare Teilmenge von $\varphi[N]$ endlich oder koendlich ist.
- φ definiert eine streng minimale Menge gdw $\mathrm{RMD}(\varphi) = (1, 1)$.
- Eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie heißt **streng minimal**, falls die Formel $x = x$ eine streng minimale Menge definiert.
- Der **algebraische Abschluss** von $A \subseteq M$ ist definiert als

$$\mathrm{acl}(A) = \bigcup \{D \mid D \subseteq M \text{ endlich und } \mathcal{L}_A\text{-def.bar}\}$$

- acl definiert stets einen Abschlussoperator auf den Modellen von T, und die Einschränkung von acl auf eine streng minimale Menge definiert sogar eine Prägeometrie.
- Dies ist eine wichtige Zutat im Beweis des Satzes von Morley.

Beispiele streng minimaler Theorien und ihre Komplexität

- T_∞ (Theorie einer unendlichen Menge)

  Für alle A gilt $\mathrm{acl}(A) = A$, insbesondere ist in T_∞ die acl-Prägeometrie **trivial**, d.h. $\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{acl}(\{a\})$.

- $T_{K\text{-VR}}$ (Theorie der unendl. K-VRe für einen Schiefkörper K)

  Die acl-Prägeometrie in $T_{K\text{-VR}}$ ist **modular**, d.h. zwei Mengen A und B sind stets unabhängig über $\mathrm{acl}(A) \cap \mathrm{acl}(B)$.

  Sie ist aber nicht trivial, denn i.A. gilt

  $$v + w \in \mathrm{acl}(\{v, w\}) \setminus [\mathrm{acl}(\{v\}) \cup \mathrm{acl}(\{w\})].$$

- Offenbar gilt: trivial $\Rightarrow$ modular

- ACF_p (Theorie der alg. abg. Körper der Charakteristik p)

  Die acl-Prägeometrie in ACF_p ist **nicht lokal modular**, d.h. nicht modular selbst nach beliebiger Konstantenerweiterung.

- Vortrag 3: Prägeometrien und (lokale) Modularität

Zilbers Trichotomievermutung

Leitmotiv der geometrischen Stabilitätstheorie (Zilber):
Jegliche geometrische Komplexität in einer stabilen Theorie rührt von einer algebraischen Struktur her, die in dieser Theorie interpretierbar ist.

Trichotomievermutung (Zilber 1980)

Sei T streng minimal. Dann gilt genau einer der folgenden Fälle:

1. T hat eine **triviale** Prägeometrie.
2. T hat eine **lokal modulare** nicht-triviale Prägeometrie, und T interpretiert eine unendliche (abelsche) Gruppe.
3. T hat eine **nicht lokal modulare** Prägeometrie, und T interpretiert einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

   Zusatz zu 3.: Alle definierbaren Teilmengen in diesem Körper sind bereits in der Ringsprache definierbar.

Positive Resultate zur Trichotomievermutung

Auf die folgenden Resultate gehen wir im Seminar nicht ein:

Satz (Zilber für T ω-kategorisch, Hrushovski im allg. Fall)

Ist die T s.m. lokal modular nicht trivial, so interpretiert T eine unendliche abelsche Gruppe A, und die auf A induzierte Struktur ist (im wesentlichen) die eines Vektorraums über einem Schiefkörper.

Satz (Hrushovski-Zilber 1996)

Die Trichotomie-Vermutung gilt im wichtigen Spezialfall sogenannter **Zariski-Geometrien** *(inklusive des Zusatzes in 3.).*

Dieses Resultat ist das Herzstück einer Reihe von berühmten Anwendungen modelltheoretischer Methoden auf Probleme aus der algebraischen und diophantischen Geometrie durch Hrushovski.

Hrushovskis Gegenbeispiel zur Trichotomievermutung

Im Allgemeinen ist die Trichotomievermutung falsch!

- Hrushovski 1988: Konstruktion eines Gegenbeispiels (*ab initio*)
- Eine nicht lokal modulare streng minimale Theorie, in der keine unendliche Gruppe (und somit insbesondere kein unendlicher Körper) interpretiertbar ist.
- Variante der klassischen Fraïssé-Amalgamierung.
- Neue Hauptzutat: Eine *Prädimensionsfunktion*, die in die Konstruktion einbaut, was schlussendlich die acl-Dimension in der erhaltenen streng minimalen Theorie sein wird.
- Vortrag 2: Wiederholung der Fraïssé-Amalgamierung
- Vorträge 4+5: ab initio Konstruktion

Baldwins Pseudoebene

Eine Variante der ab initio Konstruktion ist *Baldwins Pseudoebene*:

- Baldwin 1994: Konstruktion einer **nichtklassischen projektiven Ebene** (d.h., der Satz von Desargues gilt nicht)
- Bipartiter Graph bestehend aus einer Menge von **Punkten** P, einer Menge von **Geraden** L sowie der Kantenmenge, die die **Inzidenzrelation** zwischen P und L beschreibt.
- Die Struktur ist von Morley Rang 2, fast streng minimal (d.h. im acl einer streng minimalen Menge),
- nicht lokal modular und interpretiert keine unendliche Gruppe.
- Vorträge 6+7: Konstruktion von Baldwins Pseudoebene

Hrushovskis Fusion zweier streng minimaler Theorien 1

Sei T eine streng minimale $\mathcal{L}$-Theorie mit Monstermodell $\mathfrak{M} \models T$.

- Ist $\varphi(x, y)$ eine $\mathcal{L}$-Formel ($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$), so existiert für alle $r \in \mathbb{N}$ eine $\mathcal{L}$-Formel $\theta_r(y)$ mit

  $$\theta_r[\mathfrak{M}] = \{b \in M^m \mid \mathrm{RM}(\varphi(x, b)) = r\}$$

  (**Definierbarkeit des Morleyrangs**)

- Falls für alle $\varphi(x, y)$ und $r, d \in \mathbb{N}$ eine Formel $\mu_{r,d}(y)$ ex. mit

  $$\mu_{r,d}[\mathfrak{M}] = \{b \in M^m \mid \mathrm{RDM}(\varphi(x, b)) = (r, d)\},$$

  sagt man, T habe einen **definierbaren Morleygrad** (**DMP**).

Satz (Hrushovski 1992)

Seien T_1 und T_2 zwei streng minimale Theorien mit DMP in disjunkten abzählbaren Sprachen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$. Dann existiert eine streng minimale $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-Theorie $T \supseteq T_1 \cup T_2$.

Hrushovskis Fusion zweier streng minimaler Theorien 2

Vortrag 9: DMP und streng minimale Expansionen von ACF

Im Vortrag wird insbesondere behandelt:

- ACF_p hat die DMP für alle p.
- Es existieren streng minimale Theorien ohne DMP.

Vorträge 10-12: Konstruktion der Fusion in zwei Schritten:

1. Die **freie Fusion** von T_1 und T_2 (eine Theorie von RM ω).
2. **Kollaps** der freien Fusion (durch Amalgamieren in einer eingeschränkten Klasse) in eine streng minimale Theorie $T \supseteq T_1 \cup T_2$.

Variante der Fusion: die generische Kurve (Vortrag 8)

Sei $K \models ACF_p$, $d \in \mathbb{N}$, seien a_{ij} alg. unabhängige transzendente Elemente in K für $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ mit $i + j \leq d$. Dann heißt

$$C_d = \{(x,y) \in K^2 \mid \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j = 0\}$$

die **generische Kurve vom Grad** d.

- Die Theorie $T_d := Th((K, 0, 1, +, -, \times, C_d))$ (in der Sprache $\mathcal{L}_{Ring} \cup \{R\}$) hängt nicht von der Wahl von K oder a_{ij} ab.

Satz (Chapuis, Hrushovski, Koiran, Poizat 2002)

Die Limestheorie $T_\omega = \lim_{d\to\infty} T_d$ *existiert.*

- T_ω ist die Theorie eines geeigneten Hrushovski-Amalgams.
- Als Korollar enthält man Nicht-Definierbarkeitsresultate in der algebraischen Komplexitätstheorie.