Die Definable Multiplicity Property (DMP)

Jonathan Krebs

Seminar zur Hrushovski-Amalgamierung

25. Juni 2020

Einordnung

Erinnerung: Zilbers Trichotomievermutung

Sei T streng minimal. Dann gilt genau einer der folgenden Fälle:

1. T hat eine triviale Prägeometrie.
2. T hat eine lokal modulare nicht-triviale Prägeometrie und T interpretiert eine unendliche (abelsche) Gruppe.
3. T hat eine nicht lokal modulare Prägeometrie, und T interpretiert einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

   Zusatz zu 3: Alle definierbaren Teilmengen in diesem Körper sind bereits in der Ringsprache definierbar.

Einordnung

Satz [Hru92]

Seien T_1, T_2 streng minimale Theorien in disjunkten abzählbaren Sprachen $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ mit der DMP. Dann existiert eine streng minimale $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-Theorie T mit $T|\mathcal{L}_i = T_i$.

Proposition [Hru92]

ACF_p hat die DMP (für alle p prim und 0).

Die Anwendung des Satzes für ACF_p in $\mathcal{L}_{Ring}$ und ACF_q in $\mathcal{L}'_{Ring}$ $(p \neq q)$ liefert ein Gegenbeispiel zum Zusatz!

1 Kurze Wiederholung und Ergänzung zu Morley Rang und Grad

2 Die Definable Multiplicity Property (DMP)

3 ACF und die DMP

Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Sprache, T eine vollständige $\mathcal{L}$-Theorie mit unendlichen Modellen und $\mathcal{M} \models T$ ein ω-saturiertes Modell.

Lemma 1.1

Seien X, Y $\mathcal{M}$-definierbare Mengen. Falls eine $\mathcal{M}$-definierbare Bijektion $X \to Y$ existiert, gilt $\mathrm{MRD}(X) = \mathrm{MRD}(Y)$.

Definition 1.2

Sei $A \subseteq \mathcal{M}$.

- Für $p \in S(A)$ definiere $\mathrm{MRD}(p) := \min\{\mathrm{MRD}(\phi) \mid \phi \in p\}$.
- Für $\bar{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ definiere $\mathrm{MRD}(\bar{a}/A) := \mathrm{MRD}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$.

Lemma 1.3

Sei $A \subseteq \mathcal{M} \models T$, $\phi(\bar{x})$ eine konsistente $\mathcal{L}(A)$-Formel. Dann gilt:

1. $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) = \max\{\mathrm{MR}(p) \mid \phi(\bar{x}) \in p \in S(A)\}$.
   Ein Tupel $\bar{a} \models \phi(\bar{x})$ mit $\mathrm{MR}(\bar{a}/A) = \mathrm{MR}(\phi(\bar{x}))$ heißt *generische Lösung* von $\phi(\bar{x})$ über A.
2. Falls $\mathrm{MR}(\phi(\bar{x})) \in \mathrm{On}$, dann gibt es genau $\mathrm{MD}(\phi(\bar{x}))$-viele Typen $p \in S(\mathcal{M})$ mit $\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(\phi(\bar{x}))$.
   Insbesondere ist $\mathrm{MD}(\phi(\bar{x})) = 1$ genau dann, wenn alle generischen Lösungen über $\mathcal{M}$ den gleichen Typ über $\mathcal{M}$ haben.

Sei T jetzt streng minimal.

Satz 1.4

Sei $A \subseteq \mathcal{M}$ und $\bar{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$. Dann gilt $\mathrm{MR}(\bar{a}/A) = \dim(\bar{a}/A)$.

Korollar 1.5

Sei $\phi(x_1, ..., x_n)$ eine $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formel. Dann ist $\mathrm{MR}(\phi(x_1, ..., x_n)) \leq n$.

Korollar 1.6 (Additivität des Morley Rangs)

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, $A \subseteq \mathcal{M}$. Dann ist

$$\mathrm{MR}(\bar{a}, \bar{b}/A) = \mathrm{MR}(\bar{a}/\bar{b}A) + \mathrm{MR}(\bar{b}/A).$$

Generalannahme

$\mathcal{L}$ beliebige Sprache, T streng minimale $\mathcal{L}$-Theorie, $\mathcal{M} \models T$ ω-saturiert.

Definition 2.1 (*Definable Multiplicity Property – DMP*)

In zwei Schritten:

1. Sei $\phi(\overline{x},\overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$. $\phi(\overline{x},\overline{a})$ hat die DMP, falls gilt: Es existiert eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$, sodass für alle $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$

$$\overline{b} \models \psi(\overline{y}) \Rightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x},\overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x},\overline{a})).$$

2. T hat die DMP, falls alle Formeln $\phi(\overline{x},\overline{a})$ der obigen Form die DMP haben.

(Wegen ω-Saturiertheit ist die Einschränkung auf Parametertupel aus $\mathcal{M}$ keine wirkliche Einschränkung und die DMP ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{M}$!)

Beobachtung 2.2

Die DMP gilt für alle Formeln $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ mit $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = 0$ oder $-\infty$ (also algebraische Formeln).

Beweis:

Setze $n := |\phi(\mathcal{M}, \overline{a})|$. Dann hat $\psi(\overline{y}) := \exists^{=n}\overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{y})$ die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Beobachtung 2.3

Formeln $\phi(x, \bar{a})$ in einer freien Variablen haben die DMP.

Beweis:

Da T streng minimal ist, ist $\phi(x, \bar{a})$ für alle $\bar{a} \in \mathcal{M}^{|\bar{y}|}$ algebraisch oder streng minimal.

Fall $\phi(x, \bar{a})$ algebraisch: Beobachtung 2.2.

Fall $\phi(x, \bar{a})$ streng minimal:
T eliminiert $\exists^\infty$, also existiert ein $n \in \omega$, sodass für alle $\bar{b} \in \mathcal{M}^{|\bar{y}|}$:

$$|\phi(\mathcal{M}, \bar{b})| > n \Rightarrow |\phi(\mathcal{M}, \bar{b})| \geq \aleph_0.$$

Dann hat $\psi(\bar{y}) := \exists^{>n} x.\phi(x, \bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{a})$ die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Bemerkung 2.4

Sei T abzählbar und $\aleph_0$-kategorisch. Dann hat T die DMP.

Beweis:

Nach Ryll-Nardzewski sind alle Typen in T isoliert. Für $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ hat dann eine isolierende Formel $\psi(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$ die gewünschte Eigenschaft (da der MRD nur vom Typ abhängt). $\square$

Bemerkung 2.5

1. Hat $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ die DMP für alle $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$, dann gilt für jedes $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ sogar: Es existiert eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$, sodass für alle $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$

$$\overline{b} \models \psi(\overline{y}) \Leftrightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})).$$

2. T hat genau dann die DMP, wenn gilt: Für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ und $k, m \in \omega$ existiert eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi_{k,m}(\overline{y})$, sodass gilt:

$$\psi_{k,m}(\mathcal{M}) = \left\{ \overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|} \,\middle|\, \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = (k, m) \right\}.$$

Beweis:

(2) folgt aus (1).

Zu (1):

- Nach Voraussetzung ex. für jedes $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi_{\overline{a}}(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$, sodass für alle $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$

$$\overline{b} \models \psi(\overline{y}) \Rightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})).$$

- Die Formelmenge $X := \left\{ \neg\psi_{\overline{a}}(\overline{y}) \middle| \overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|} \right\}$ ist in $\mathcal{M}$ nicht erfüllbar, wegen ω-Saturiertheit also inkonsistent.
- Mit Kompaktheit existiert endliche inkonsistente Teilmenge $\{\neg\psi_{\overline{a}_1}(\overline{y}), \dots, \neg\psi_{\overline{a}_n}(\overline{y})\} \subseteq X$.
- Es folgt $\overline{a} \models \psi_{\overline{a}_1}(\overline{y}) \vee \dots \vee \psi_{\overline{a}_n}(\overline{y})$ für alle $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$.
- Für $\overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$ wähle dann diejenigen $\overline{a}_{i_1}, \dots, \overline{a}_{i_m}$ der $\overline{a}_i$ mit

$$\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a}_{i_k})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})).$$

- Dann hat

$$\psi(\overline{y}) := \psi_{\overline{a}_{i_1}}(\overline{y}) \vee \dots \vee \psi_{\overline{a}_{i_k}}(\overline{y})$$

die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Bemerkung 2.6 (Definierbarkeit des Morley Rangs, TZ12: 6.4.4)

Für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ und $k \in \omega$ existiert eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi_k(\overline{y})$, sodass gilt:

$$\psi_k(\mathcal{M}) = \left\{ \overline{a} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|} \,\middle|\, \mathrm{MR}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = k) \right\}.$$

Bemerkung 2.7

Es gibt lokal modulare Theorien ohne die DMP.

Skizze:

Idee:

- Finde Formel $\phi(\overline{x}, y)$, sodass sich für unendlich viele Parameter $a \in \mathcal{M}$ für $\phi(\overline{x}, a)$ der gleiche MRD ergibt (bspw. (1,1)) und für unendlich viele andere Parameter $b \in \mathcal{M}$ für $\phi(\overline{x}, b)$ ein anderer MRD ergibt (bspw. (1,2)).
- Dann wäre die DMP ein Widerspruch zur strengen Minimalität!

Hrushovskis Beispiel:

- Betrachte einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V mit ausgezeichnetem Element $a \neq 0$.

- Wir definieren eine Struktur $(D; f, E, \Gamma_+)$:
  - $D := V \times \{0,1\}$.
  - f einstellige Funktion $D \to D$, $f(v,i) := (v+a, i)$,
  - E zweistellige Relation mit

$$(v_1, i_1)\ E\ (v_2, i_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2,$$

  - Γ_+ dreistellige Relation mit

$$\Gamma_+\big((v_1, i_1), (v_2, i_2), (v_3, i_3)\big) \Leftrightarrow v_1 + v_2 = v_3.$$

- Man kann sich überlegen: Diese Struktur ist streng minimal und lokal modular.

Warum ist die DMP nicht erfüllt?

- Für $(v,i) \in D$ betrachte die Formel $\Gamma_+\big(x, (v,i), y\big)$. Die definierte Menge ist

$$C\big((v,i)\big) := \Big\{\big((w_1, i_1), (w_2, i_2)\big) \in D^2 \mid w_1 + v = w_2\Big\}.$$

- Betrachte

$$C(a) = \Big\{\big((w_1, i_1), (w_2, i_2)\big) \in D^2 \mid w_1 + a = w_2\Big\}.$$

- Die Formel $f(x) = y$ definiert eine unendliche Teilmenge von $C(a)$:

$$\Big\{\big((w_1, i_1), (w_2, i_2)\big) \in D^2 \mid w_1 + a = w_2 \text{ und } i_1 = i_2\Big\}.$$

- Ebenso ist das Komplement eine unendliche Teilmenge:

$$\Big\{\big((w_1, i_1), (w_2, i_2)\big) \in D^2 \mid w_1 + a = w_2 \text{ und } i_1 \neq i_2\Big\}.$$

- Der MD von $C(a)$ ist damit 2.
- Das gleiche Resultat erhalten wir für $C(na)$, $n \in \mathbb{N}$, mit der Formel $f^n(x) = y$.
- Für die anderen $v \in V$ haben wir diese Möglichkeit zur Differenzierung nicht und $C(v)$ ist streng minimal.

Lemma 2.8

Es gelte $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x},\overline{a})) = \mathrm{MR}(\phi'(\overline{x},\overline{a})) = k \in \omega$ und $\phi(\overline{x},\overline{a})$ und $\phi'(\overline{x},\overline{a})$ seien k-äquivalent. Falls $\phi(\overline{x},\overline{a})$ die DMP hat, dann auch $\phi'(\overline{x},\overline{a})$.

Beweis:

- Nach Annahme existiert $\psi(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$, sodass für alle $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$

$$\overline{b} \models \psi(\overline{y}) \Rightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x},\overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x},\overline{a})).$$

- Es ist $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x},\overline{a})) = k$ und $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x},\overline{a}) \triangle \phi'(\overline{x},\overline{a})) = r < k$.
- Wegen Definierbarkeit des Rangs (Bemerkung 2.6) existieren $\psi'(\overline{y}), \psi''(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$, sodass für alle $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{y}|}$

$$\overline{b} \models \psi'(\overline{y}) \Rightarrow \mathrm{MR}(\phi'(\overline{x},\overline{b})) = k,$$

$$\overline{b} \models \psi''(\overline{y}) \Rightarrow \mathrm{MR}(\phi(\overline{x},\overline{b}) \triangle \phi'(\overline{x},\overline{b})) = r.$$

- Beachte: Wegen k-Äquivalenz haben $\phi(\overline{x},\overline{a})$ und $\phi'(\overline{x},\overline{a})$ auch den gleichen Grad.
- Es hat $\psi(\overline{y}) \wedge \psi'(\overline{y}) \wedge \psi''(\overline{y})$ die gewünschte Eigenschaft. □

Lemma 2.9

Seien $\phi(\overline{x}, \overline{a})$, $\psi(\overline{y}, \overline{a})$ $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-Formeln und $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ habe die DMP. Weiter existiere eine $\overline{a}$-definierbare Bijektion $\phi(\mathcal{M}, \overline{a}) \to \psi(\mathcal{M}, \overline{a})$. Dann hat auch $\psi(\overline{y}, \overline{a})$ die DMP.

Beweis:

Sei $\chi_1(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$ sodass für $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{z}|}$ gilt

$$\overline{b} \models \chi_1(\overline{z}) \Rightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})).$$

$\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a})$ definiere eine Bijektion $\phi(\mathcal{M}, \overline{a}) \to \psi(\mathcal{M}, \overline{a})$. Setze

$$\begin{aligned}
\chi_2(\overline{z}) :=\ & \text{„}\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \text{ definiert eine Bijektion } \phi(\mathcal{M}, \overline{z}) \to \psi(\mathcal{M}, \overline{z})\text{“} \\
=\ & \forall \overline{x}, \overline{y}\, (\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \to \phi(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \psi(\overline{y}, \overline{z})) \\
& \wedge \forall \overline{x}\, (\phi(\overline{x}, \overline{z}) \to \exists! \overline{y}. \theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})) \\
& \wedge \forall \overline{y}\, (\psi(\overline{y}, \overline{z}) \to \exists! \overline{x}. \theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}))\,.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1.1 hat dann $\chi_1(\overline{z}) \wedge \chi_2(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$ die gewünschte Eigenschaft. □

Lemma 2.10

Sei $C \subseteq \mathcal{N} \models T$. Dann hat $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_C)$ die DMP genau dann, wenn T die DMP hat.

Beweis:

Sei $\mathcal{N}'_C \models \mathrm{Th}(\mathcal{N}_C)$ ω-saturiert. ($\mathcal{N}' \models T$ ist dann auch ω-saturiert.)

„$\Longleftarrow$“: Sei $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ eine $\mathcal{L}(C)$-Formel mit Parametern $\overline{c}$ aus C, $\overline{a} \in \mathcal{N}'^{|\overline{y}|}$. Betrachte $\phi(\overline{x}, \overline{a}, \overline{c})$.

- Da T die DMP hat, ex. $\psi(\overline{y}, \overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{c}/\emptyset)$, sodass für alle $\overline{b}_1, \overline{b}_2 \in \mathcal{N}'^{|\overline{y}, \overline{z}|}$

$$\overline{b}_1, \overline{b}_2 \models \psi(\overline{y}, \overline{z}) \Rightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b}_1, \overline{b}_2)) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a}, \overline{c})).$$

- Dann hat $\psi'(\overline{y}) := \psi(\overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/C)$ die gewünschte Eigenschaft.

„$\Longrightarrow$": Sei $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $\overline{a} \in \mathcal{N}'^{|\overline{y}|}$.

- Nach Annahme (und Bemerkung 2.5) ex. $\psi_C(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/C)$ (!), sodass für alle $\overline{b} \in \mathcal{N}'^{|\overline{y}|}$

$$\overline{b} \models \psi_C(\overline{y}) \Leftrightarrow \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})).$$

- Da der MRD nur vom Typ über $\emptyset$ abhängt, ist $\{\neg\psi_C(\overline{y})\} \cup \mathrm{tp}(\overline{a}/\emptyset)$ in $\mathcal{N}'$ nicht erfüllbar, wegen ω-Saturiertheit von $\mathcal{N}'_c$ also inkonsistent (bzgl. $\mathrm{Th}(\mathcal{N}_C)$).
- Mit Kompaktheit existieren endlich viele $\mathcal{L}$-Formeln $\psi_1(\overline{y}), \ldots, \psi_n(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\emptyset)$, sodass $\neg\psi_C(\overline{y}) \wedge \psi_1(\overline{y}) \wedge \ldots \wedge \psi_n(\overline{y})$ inkonsistent ist.
- Es folgt $\psi(\overline{y}) := \psi_1(\overline{y}) \wedge \ldots \wedge \psi_n(\overline{y}) \vdash_{\mathrm{Th}(\mathcal{N}_C)} \psi_C(\overline{y})$. Außerdem gilt $\psi(\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\emptyset)$.
- Sei nun $\overline{b} \in \mathcal{N}'^{|\overline{y}|}$ mit $\overline{b} \models \psi(\overline{y})$. Dann gilt $\overline{b} \models \psi_C(\overline{y})$ und folglich $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b})) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$. $\square$

Lemma 2.11

Sei $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathrm{MRD}(\exists\overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k, 1)$.
2. Für $\overline{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ mit $\overline{b} \models \exists\overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ gilt $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c})) = (1, 1)$.

Dann gilt $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k + 1, 1)$.

Beweis:

- Sei $\overline{b}$ generische Lösung von $\exists\overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}))$, also $\mathrm{MR}(\overline{b}/\overline{c}) = k$.
- Sei $\overline{a}$ generische Lösung von $\phi(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c})$, also $\mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{b}, \overline{c}) = 1$.
- Per Additivität des MR ist folglich $\mathrm{MR}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c}) = k + 1$. Somit $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) \geq k + 1$.
- Sei nun $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{N}^{|\overline{x}, \overline{y}|}$ eine generische Lösung von $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ über $\mathcal{M}$ (!), wobei $\mathcal{N} \succeq \mathcal{M}$ ω-saturiert ist. Es ist dann $\mathrm{MR}(\overline{a}, \overline{b}/\mathcal{M}) \geq k + 1$.
- Wegen $\mathrm{MR}(\overline{b}/\overline{c}) \leq k$, $\mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{b}, \overline{c}) \leq 1$, ist auch $\mathrm{MR}(\overline{b}/\mathcal{M}) \leq k$, $\mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{b}, \mathcal{M}) \leq 1$.

- Es ist $\mathrm{MR}(\overline{b}/\mathcal{M}) + \mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{b},\mathcal{M}) = \mathrm{MR}(\overline{a},\overline{b}/\mathcal{M}) \geq k+1$, also folgt $\mathrm{MR}(\overline{b}/\mathcal{M}) = k$, $\mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{b},\mathcal{M}) = 1$ und $\mathrm{MR}(\overline{a},\overline{b}/\mathcal{M}) = k+1$ sowie $\mathrm{MR}(\phi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})) = k+1$.
- Weil nach Voraussetzung $\mathrm{MRD}(\exists\overline{x}.\phi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})) = (k,1)$ und $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x},\overline{b},\overline{c})) = (1,1)$, ist damit $\overline{b}$ generische Lösung von $\exists\overline{x}.\phi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})$ über $\mathcal{M}$ und $\overline{a}$ generische Lösung von $\phi(\overline{x},\overline{b},\overline{c})$ über $\mathcal{M}$.
- Weil die Grade 1 sind, ist mit Lemma 1.3 der Typ von $\overline{b}$ über $\mathcal{M}$ und von $\overline{a}$ über $\overline{b},\mathcal{M}$ eindeutig bestimmt.
- Folglich ist auch der Typ der generischen Lösung $\overline{a},\overline{b}$ von $\phi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})$ über $\mathcal{M}$ eindeutig bestimmt.
- Mit Lemma 1.3 folgt $\mathrm{MD}(\phi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})) = 1$. $\square$

Lemma 2.12

Seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, $k \geq 1$ und es gelte:

1. $\mathrm{MRD}(\overline{a}/\overline{b}, \overline{c}) = (1, 1)$.
2. $\mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{c}) = (k, 1)$.
3. Die DMP gilt für alle Formeln mit $\mathrm{MR} \leq k$.

Dann existiert eine Formel $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c})$ mit $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k+1, 1)$ und der DMP.

Beweis:

- Sei $\phi'(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{b}, \overline{c})$ streng minimal. Nach Voraussetzung (3) hat diese Formel die DMP, etwa mittels $\psi'(\overline{y}, \overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}, \overline{c})$.
- Dann hat die äquivalente und damit ebenfalls streng minimale Formel $\phi''(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c}) := \phi'(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c}) \wedge \psi'(\overline{b}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{b}, \overline{c})$ die Zusatzeigenschaft, dass für alle $\overline{b}', \overline{c}'$ die Formel $\phi''(\overline{x}, \overline{b}', \overline{c}')$ im Fall der Konsistenz streng minimal ist.
- Sei $\theta(\overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{c})$ mit $\mathrm{MRD} = (k, 1)$.

- Setze nun

$$\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) := \phi''(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \wedge \theta(\overline{y}, \overline{c}) \wedge \exists \overline{x}.\phi''(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c}).$$

Behauptung 1: $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k+1, 1)$.
Nutze Lemma 2.11:

- $\exists \overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ ist äquivalent zu $\theta(\overline{y}, \overline{c}) \wedge \exists \overline{x}.\phi''(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{c})$, hat also wie diese Formel einen MRD von $(k, 1)$.
- Sei $\overline{b}' \in \mathcal{M}^{<\omega}$ mit $\overline{b}' \models \exists \overline{x}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$. Dann ist

$$\phi(\overline{x}, \overline{b}', \overline{c}) = \phi''(\overline{x}, \overline{b}', \overline{c}) \wedge \theta(\overline{b}', \overline{c}) \wedge \exists \overline{x}.\phi''(\overline{x}, \overline{b}', \overline{c})$$

  äquivalent zu $\phi''(\overline{x}, \overline{b}', \overline{c})$ und ist wie diese Formal nach Konstruktion von $\phi''(\overline{x}, \overline{b}, \overline{c})$ streng minimal.

Behauptung 2: $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ hat die DMP.

- Nach Voraussetzung (3) hat $\theta(\overline{y}, \overline{c}) \wedge \exists \overline{x}.\phi''(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{c})$ die DMP, etwa mittels $\psi(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{c})$ (Erinnerung: MRD ist (k,1)).
- Für $\overline{c}' \models \psi(\overline{z})$ ergibt sich genau wie bei Behauptung 1 unter Nutzung von Lemma 2.11, dass $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}')) = (k+1, 1)$.
- $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ hat also die DMP mittels $\psi(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{c})$. $\square$

Lemma 2.13

Seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c})$ und es gelte

1. $\mathrm{MRD}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c}) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k, 1)$.
2. $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ hat die DMP.
3. $\mathrm{MR}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c}) = \mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{c})$.

Dann hat $\exists \overline{y}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{c})$ auch einen MRD von $(k, 1)$ und die DMP.

Beweis:

- Es ist $\mathrm{MRD}(\exists \overline{y}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) \leq \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k, 1)$.
- Nach Voraussetzung (3) ist aber $\mathrm{MRD}(\exists \overline{y}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) \geq (k, 1)$, also folgt die Gleichheit.
- Nach Voraussetzung (2) hat $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ die DMP, etwa mittels $\psi(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{c})$.
- Dann hat $\exists \overline{y}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ die DMP mittels

$$\psi(\overline{z}) \wedge „\mathrm{MR}(\exists \overline{y}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = k“ \in \mathrm{tp}(\overline{c}).$$

(nutze Definierbarkeit des MR, Bemerkung 2.6) □

Hauptlemma 2.14

Die DMP gelte für alle streng minimalen Formeln $\phi(\overline{x}, \overline{a})$. Dann hat T die DMP.

Beweis:

Vorbemerkung: O.E. können wir annehmen, dass $|\operatorname{acl}(\emptyset)| \geq \aleph_0$.
(Sonst können wir Konstanten für eine unendliche Teilmenge $C \subseteq \mathcal{M}$ hinzufügen, sodass dies erfüllt ist. Wie in Lemma 2.10 „$\Leftarrow$“ haben dann auch alle streng minimalen $\mathcal{L}(C)$-Formeln die DMP bzgl. $\operatorname{Th}(\mathcal{M}_C)$. Mit Lemma 2.10 „$\Rightarrow$“ genügt es dann die Aussage für $\operatorname{Th}(\mathcal{M}_C)$ zu zeigen.)

Erinnerung [Bay20, 12.32]: In streng minimalen Theorien sind unendliche acl-abgeschlossene Teilmengen bereits elementare Unterstrukturen.

Damit ist $\operatorname{acl}(A) \preceq \mathcal{M}$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathcal{M}$. (Ende Vorbemerkung)

Induktion über die möglichen MRDs $(k, m) \in \omega^2$.

$\underline{k = 0 \text{ (oder } -\infty)}$: DMP erfüllt nach Beobachtung 2.2.

$\underline{(k, m) = (1, 1)}$: DMP gilt per Annahme.

<u>$(k,1) \to (k,m)$ mit $k \geq 1$ und $m > 1$</u>:

Sei $\phi(\overline{x},\overline{a})$ gegeben mit $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x},\overline{a})) = (k,m)$.

- Sei
$$\phi(\overline{x},\overline{a}) \leftrightarrow \phi_1(\overline{x},\overline{p}_1)\dot{\vee}...\dot{\vee}\phi_m(\overline{x},\overline{p}_m)$$
Zerlegung in k-streng-minimale Mengen mit Parametern $\overline{p}_i \in \mathcal{M}^{<\omega}$.
- Setze $\overline{a}' := \overline{a},\overline{p}_1,...,\overline{p}_m$. Dann können wir die Zerlegung umschreiben:
$$\phi(\overline{x},\overline{a}') \leftrightarrow \phi_1(\overline{x},\overline{a}')\dot{\vee}...\dot{\vee}\phi_m(\overline{x},\overline{a}').$$
- Nach IV existieren $\psi_i(\overline{y}') \in \mathrm{tp}(\overline{a}')$, sodass für alle $\overline{b}' \in \mathcal{M}^{|\overline{y}'|}$ gilt
$$\overline{b}' \models \psi_i(\overline{y}') \Rightarrow \mathrm{MRD}\,\phi_i(\overline{x},\overline{b}') = (k,1).$$
- Setze
$$\psi(\overline{y}') := \left(\bigwedge_i \psi_i(\overline{y}')\right) \wedge \forall \overline{x} \left(\phi(\overline{x},\overline{y}') \leftrightarrow \dot{\bigvee_i} \phi_i(\overline{x},\overline{y}')\right) \in \mathrm{tp}(\overline{a}').$$
- Mit $\overline{y}' = \overline{y},\overline{z}$ erfüllt $\psi'(\overline{y}) := \exists \overline{z}.\psi(\overline{y},\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{a})$ die gewünschte Eigenschaft.

$(< k, m) \to (k, 1)$ mit $k > 1$:

Sei $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ gegeben mit $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = (k, 1)$.

Sei $\overline{b} \in \mathcal{M}^{|\overline{x}|}$ generische Lösung von $\phi(\overline{x}, \overline{a})$, d.h. $\overline{b} \models \phi(\overline{x}, \overline{a})$ und $\dim(\overline{b}/\overline{a}) = \mathrm{MR}(\overline{b}/\overline{a}) = k$ (generische Lösung existiert in $\mathcal{M}$ wegen ω-Saturiertheit).

Ziel: Finde Formel $\phi'(\overline{x}, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$ mit $\mathrm{MRD}(\phi'(\overline{x}, \overline{a})) = (k, 1)$ und der DMP. Dann hat auch $\phi(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \phi'(\overline{x}, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$ Rang k und Grad 1. Somit sind $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ und $\phi'(\overline{x}, \overline{a})$ k-äquivalent und die Behauptung folgt mit Lemma 2.8.

Los geht's:

O.E. ist bereits $\overline{b}_{\leqslant k}$ generische Folge über $\overline{a}$, d.h. $\mathrm{MR}(\overline{b}_{<k}/\overline{a}) = k - 1$ und $\mathrm{MR}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{b}_{<k}) = 1$.

Schritt 1:

Wir hätten gerne, dass die MDs 1 sind.

- Idee (zunächst für $\overline{b}/\overline{a}, \overline{b}_{<k}$): Füge zu $\overline{a}, \overline{b}_{<k}$ Tupel $\overline{b}' \in \mathrm{acl}(\overline{a}, \overline{b}_{<k})^{<\omega}$ hinzu, sodass sich der MD auf 1 reduziert (MR bleibt erhalten), d.h. sodass $\mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{b}_{<k}, \overline{b}') = (1, 1)$.

- Sei $\psi(\overline{x}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{b}_{<k})$ mit $\mathrm{MR}(\psi(\overline{x})) = 1$.
- Sei $\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi_1(\overline{x}, \overline{p}_1)\dot{\vee}...\dot{\vee}\psi_m(\overline{x}, \overline{p}_m)$ Zerlegung in streng minimale Mengen mit Parametern $\overline{p}_i \in \mathcal{M}^{<\omega}$, wobei $m = \mathrm{MD}(\psi(\overline{x}))$.
- Nach Annahme haben die $\psi_i(\overline{x}, \overline{p}_i)$ die DMP, es existieren also $\chi_i(\overline{y}_i) \in \mathrm{tp}(\overline{p}_i/\emptyset)$, sodass für alle $\overline{c}_i \in \mathcal{M}^{|\overline{y}_i|}$

$$\overline{c}_i \models \chi_i(\overline{y}_i) \Rightarrow \mathrm{MRD}(\psi_i(\overline{x}, \overline{c}_i)) = (1, 1).$$

- Damit lässt sich die Zerlegbarkeit von $\psi(\overline{x})$ mit einer $\mathcal{L}(\overline{a}, \overline{b}_{<k})$-Aussage ausdrücken:

$$\mathcal{M}_{\overline{a},\overline{b}_{<k}} \models \exists \overline{y}_1, ..., \overline{y}_m. \left(\bigwedge_i \chi_i(\overline{y}_i) \right) \wedge \forall \overline{x} \left(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \dot{\bigvee_i} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}_i) \right).$$

- Nach Vorüberlegung ist $\mathcal{A} := \mathrm{acl}(\overline{a}, \overline{b}_{<k}) \preceq \mathcal{M}$, also auch

$$\mathcal{A}_{\overline{a},\overline{b}_{<k}} \models \exists \overline{y}_1, ..., \overline{y}_m. \left(\bigwedge_i \chi_i(\overline{y}_i) \right) \wedge \forall \overline{x} \left(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \dot{\bigvee_i} \psi_i(\overline{x}, \overline{y}_i) \right).$$

- Wir erhalten $\overline{s}_i \in \mathcal{A}^{|\overline{y}_i|}$ mit $\overline{s}_i \models \chi_i(\overline{y}_i)$, also $\mathrm{MRD}(\psi_i(\overline{x}, \overline{s}_i)) = (1,1)$, und

$$\mathcal{A} \models \psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi_1(\overline{x}, \overline{s}_1) \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} \psi_m(\overline{x}, \overline{s}_m).$$

- Wähle $\psi_{\hat{\imath}}(\overline{x}, \overline{s}_{\hat{\imath}})$ mit $\overline{b} \in \psi_{\hat{\imath}}(\mathcal{M}, \overline{s}_{\hat{\imath}})$.
- Mit $\overline{b}' := \overline{s}_{\hat{\imath}} \in \mathrm{acl}(\overline{a}, \overline{b}_{<k})$ erhalten wir wie gewünscht

$$\mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{b}_{<k}, \overline{b}') = \mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{b}_{<k}, \overline{s}_{\hat{\imath}}) = (1,1).$$

Für $\overline{b}_{<k}/\overline{a}$ (Erinnerung: Es war $\mathrm{MR}(\overline{b}_{<k}/\overline{a}) = k-1$):

- Es ist auch $\mathrm{MR}(\overline{b}_{<k}, \overline{b}'/\overline{a}) = k-1$.
- Auf die gleiche Weise (unter Nutzung der IV für $\mathrm{MRD} = (k-1,1)$) erhalten wir $\overline{a}' \in \mathrm{acl}(\overline{a})$ mit

$$\mathrm{MRD}(\overline{b}_{<k}, \overline{b}'/\overline{a}, \overline{a}') = (k-1,1).$$

Es ist dann auch

$$\mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{b}_{<k}, \overline{b}', \overline{a}, \overline{a}') = (1,1).$$

Schritt 2:

Resultat aus Schritt 1 war:

- $\mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{b}_{<k}, \overline{b}', \overline{a}, \overline{a}') = (1,1)$.
- $\mathrm{MRD}(\overline{b}_{<k}, \overline{b}'/\overline{a}, \overline{a}') = (k-1,1)$.

Erinnerung an Lemma 2.12: Seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, $k \geq 1$ und es gelte:

1. $\mathrm{MRD}(\overline{a}/\overline{b}, \overline{c}) = (1,1)$.
2. $\mathrm{MRD}(\overline{b}/\overline{c}) = (k,1)$.
3. Die DMP gilt für alle Formeln mit $\mathrm{MR} \leq k$.

Dann existiert eine Formel $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c})$ mit $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k+1,1)$ und der DMP.

Wir erhalten eine Formel $\phi'(\overline{x}, \overline{z}, \overline{x}', \overline{a}, \overline{a}') \in \mathrm{tp}(\overline{b}, \overline{b}_{<k}, \overline{b}'/\overline{a}, \overline{a}')$ mit MRD von $(k,1)$ und der DMP.

Schritt 3: Elimination von $\overline{b}_{<k}, \overline{b}'$.

Resultat aus Schritt 2 war: Formel $\phi'(\overline{x}, \overline{z}, \overline{x}', \overline{a}, \overline{a}') \in \mathrm{tp}(\overline{b}, \overline{b}_{<k}, \overline{b}'/\overline{a}, \overline{a}')$ mit MRD von $(k, 1)$ und der DMP.

Erinnerung an Lemma 2.13: Seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{M}^{<\omega}$, $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c})$ und es gelte

1. $\mathrm{MRD}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c}) = \mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})) = (k, 1)$.
2. $\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ hat die DMP.
3. $\mathrm{MR}(\overline{a}, \overline{b}/\overline{c}) = \mathrm{MR}(\overline{a}/\overline{c})$.

Dann hat $\exists\overline{y}.\phi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{c})$ auch einen MRD von $(k, 1)$ und die DMP.

Es folgt, dass die Formel

$$\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{a}') := \exists\overline{z}, \overline{x}'.\phi'(\overline{x}, \overline{z}, \overline{x}', \overline{a}, \overline{a}') \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{a}')$$

einen MRD von $(k, 1)$ und die DMP hat.

Schritt 4: Elimination von $\overline{a}'$.

Resultat aus Schritt 3 war: $\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{a}') \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{a}')$ mit MRD von $(k, 1)$ und der DMP.

- Wegen $\overline{a}' \in \mathrm{acl}(\overline{a})^{<\omega}$ ex. algebraische Formel $\theta(\overline{z}, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}'/\overline{a})$, die diesen Typ isoliert.
- Betrachte

$$\phi'''(\overline{x}, \overline{a}) := \exists \overline{z} \, (\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{z}) \wedge \theta(\overline{z}, \overline{a})) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}).$$

Behauptung: $\mathrm{MRD}(\phi'''(\overline{x}, \overline{a})) = (k, 1)$.

- Es ist
$$\phi'''(\mathcal{M}, \overline{a}) = \bigcup \{\phi''(\mathcal{M}, \overline{a}, \overline{c}) \mid \overline{c} \models \theta(\overline{z}, \overline{a})\} .$$
- $\theta(\overline{z}, \overline{a})$ ist algebraisch, es gibt also nur endlich viele $\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_n \models \theta(\overline{z}, \overline{a})$. Also:

$$\phi'''(\mathcal{M}, \overline{a}) = \bigcup_{i=1}^{n} \phi''(\mathcal{M}, \overline{a}, \overline{c}_i).$$

- Definiere $\chi(\overline{z}, \overline{a}) :=$ „ $\mathrm{MR}\left(\phi(\overline{x}, \overline{a}) \triangle \phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{z})\right) < k$“ (nutze Bemerkung 2.6).
- Es ist $\chi(\overline{z}, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}'/\overline{a})$ wegen:
  - $\phi(\overline{x}, \overline{a})$, $\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{a}') \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{a}')$,
  - $\mathrm{MR}(\overline{b}/\overline{a}, \overline{a}') = k$ und
  - $\mathrm{MRD}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = \mathrm{MRD}(\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{a}')) = (k, 1)$.
- Da $\theta(\overline{z}, \overline{a})$ den Typ $\mathrm{tp}(\overline{a}'/\overline{a})$ isoliert, gilt auch für alle $\overline{c}_i \models \theta(\overline{z}, \overline{a})$, dass $\overline{c}_i \models \chi(\overline{z}, \overline{a})$.
- Folglich sind alle $\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{c}_i)$ k-äquivalent mit $\phi(\overline{x}, \overline{a})$, per Transitivität also auch untereinander.
- Wegen $\mathrm{MRD}(\phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{a}')) = (k, 1)$ folgt dann auch

$$\mathrm{MRD}(\phi'''(\overline{x}, \overline{a})) = \mathrm{MRD}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \phi''(\overline{x}, \overline{a}, \overline{c}_i)\right) = (k, 1).$$

Noch zu zeigen: $\phi'''(\overline{x},\overline{a})$ hat die DMP.

- Setze $n := |\theta(\overline{z},\overline{a})|$.
- Erinnerung: $\phi''(\overline{x},\overline{a},\overline{a}')$ hat die DMP, etwa mittels $\psi''(\overline{y},\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{a},\overline{a}')$.
- Dann hat $\phi'''(\overline{x},\overline{a}) = \exists\overline{z}\,(\phi''(\overline{x},\overline{a},\overline{z}) \wedge \theta(\overline{z},\overline{a}))$ die DMP mittels

$$\begin{aligned}\psi'''(\overline{y}) := {} & \exists^{=n}\overline{z}.\theta(\overline{z},\overline{y}) \\ & \wedge \forall\overline{z}\,(\theta(\overline{z},\overline{y}) \to \psi''(\overline{y},\overline{z})) \\ & \wedge \forall\overline{z},\overline{z}'\Big(\theta(\overline{z},\overline{y}) \wedge \theta(\overline{z}',\overline{y}) \to \\ & \qquad \text{„}\,\mathrm{MR}\,(\phi''(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\triangle\phi''(\overline{x},\overline{y},\overline{z}')) < k\text{“}\Big) \in \mathrm{tp}(\overline{a}). \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 2.15 (Hru92: S. 131/2)

Hat T eine triviale Prägeometrie, dann hat T die DMP.

Definition 3.1

Eine algebraische Körpererweiterung L/K heißt *separabel*, falls für alle $a \in L$ das Minimalpolynom $\mathrm{Min}(a, K; X)$ separabel ist, also in $\overline{K}$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Satz 3.2 (vom primitiven Element)

Sei L/K eine endliche separable Erweiterung. Dann existiert ein $a \in L$ mit $L = K(a)$.

Definition 3.3

Ein Körper K heißt *perfekt* (oder *vollkommen*), falls jede algebraische Erweiterung L/K separabel ist.

Satz 3.4

1. Körper der Charakteristik 0 sind perfekt.
2. Ein Körper K der Charakteristik $p > 0$ ist genau dann perfekt, wenn $K = K^p$.

Bemerkung 3.5

1. Algebraisch abgeschlossene Körper sind perfekt.
2. Algebraische Erweiterungen perfekter Körper sind perfekt.

Definition 3.6

Sei L/K eine Körpererweiterung (mit Primzahl-Charakteristik p), L sei algebraisch abgeschlossen. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$K^{p^{-n}} := \{a \in L \mid a^{p^n} \in K\}.$$

Dann ist

$$K^{p^{-\infty}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^{p^{-n}}$$

der kleinste perfekte Zwischenkörper. Er heißt der *perfekte Abschluss* von K.

Für Charakteristik 0 setzen wir $K^{p^{-\infty}} := K$.

Definition 3.7

Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $A \in \mathcal{M}$ eine Teilmenge. Der *definierbare Abschluss* von A in $\mathcal{M}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{dcl}^{\mathcal{M}}(A) := \{a \in \mathcal{M} \mid \{a\} = \phi(\mathcal{M}) \text{ für eine } \mathcal{L}(A)\text{-Formel } \phi(x)\}\,.$$

Lemma 3.8 (Pil98: S. 63)

Sei $A \subseteq K \models \mathrm{ACF}_P$ (p prim oder 0) mit Primkörper F. Dann ist der definierbare Abschluss von A gleich dem perfekten Abschluss des von A erzeugten Teilkörpers:

$$\mathrm{dcl}(A) = F(A)^{p^{-\infty}}.$$

Lemma 3.9

Sei $\mathcal{M}$ eine ω-saturierte $\mathcal{L}$-Struktur, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ (nicht notwendig $|\bar{a}| = |\bar{b}|$) und $A \subseteq \mathcal{M}$. Es gelte $\mathrm{dcl}(A, \bar{a}) = \mathrm{dcl}(A, \bar{b})$. Dann gilt:

1. $\mathrm{MRD}(\bar{a}/A) = \mathrm{MRD}(\bar{b}/A)$ $(=: (k, m))$.
2. Es existieren $\phi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ und $\psi(\bar{y}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ mit $\mathrm{MRD}(\phi(\bar{x})) = \mathrm{MRD}(\psi(\bar{y})) = (k, m)$, sodass eine A-definierbare Bijektion $\phi(\mathcal{M}) \to \psi(\mathcal{M})$ existiert.

Beweis:

O.E. $A = \emptyset$ (sonst betrachte $\mathcal{M}_A$).

- Seien $\phi(\bar{x}, \bar{y})$, $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ $\mathcal{L}$-Formeln mit $\phi(\bar{a}, \mathcal{M}) = \{\bar{b}\}$ und $\psi(\mathcal{M}, \bar{b}) = \{\bar{a}\}$.
- Die Formel

$$\begin{aligned}\theta(\bar{x}, \bar{y}) := {} & \phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{y}) \\ & \wedge \forall \bar{y}' \, (\phi(\bar{x}, \bar{y}') \wedge \psi(\bar{x}, \bar{y}') \to \bar{y}' = \bar{y}) \\ & \wedge \forall \bar{x}' \, (\phi(\bar{x}', \bar{y}) \wedge \psi(\bar{x}', \bar{y}) \to \bar{x}' = \bar{x})\end{aligned}$$

  definiert eine partielle Bijektion $f : X \to Y$ zwischen definierbaren Mengen mit $\bar{a} \mapsto \bar{b}$.

- Sei nun $\phi'(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{a})$ mit $\mathrm{MRD}(\phi'(\bar{x})) = \mathrm{MRD}(\bar{a}) =: (k, m)$.
- Dann ist auch $\mathrm{MRD}(X \cap \phi'(\mathcal{M})) = (k, m)$ und für $f(X \cap \phi'(\mathcal{M})) \ni \bar{b}$ gilt nach Lemma 1.1, dass $\mathrm{MRD}(f(X \cap \phi'(\mathcal{M}))) = (k, m)$.
- Es folgt $\mathrm{MRD}(\bar{b}) \leq (k, m) = \mathrm{MRD}(\bar{a})$ und per Symmetrie $\mathrm{MRD}(\bar{b}) = (k, m)$. Das zeigt (1).
- (2) folgt für $X \cap \phi'(\mathcal{M})$ und $f(X \cap \phi'(\mathcal{M}))$. $\square$

Für die Grundbegriffe der algebraischen Geometrie siehe [Hul12: Kap. 0,1]

Proposition 3.10 (Spezialfall von [Mil05: 2.27])

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für jede Zariski-abgeschlossene Menge $V \subseteq K^n$ der Dimension $n-1$ gilt $I(V) = (f)$ für ein $f \in K[X^n]$.

Proposition 3.11 (Mar02: 6.2.23)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \subseteq K^n$ eine irreduzible Zariski-abgeschlossene Menge. Dann ist $\mathrm{MR}(V)$ gleich der Dimension von V.

Lemma 3.12

Sei $K \models$ ACF ω-saturiert. Für ein Polynom $P(x_1, x_2) \in K[X_1, X_2]$ ist die Formel $P(x_1, x_2) \doteq 0$ streng minimal genau dann, wenn P irreduzibel ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$“:

- MR $= 1$ schließt aus, dass P null oder konstant ist.
- Wäre P reduzibel, würde gelten $P = Q_1 Q_2$ für $Q_1, Q_2 \in K[X_1, X_2]$ nicht null und nicht konstant.
- Dann definieren $Q_1(x_1, x_2) \doteq 0$ und $Q_2(x_1, x_2) \doteq 0$ Teilmengen von $P(x_1, x_2) \doteq 0$.
- Da in algebraisch abgeschlossenen Körpern die Nullstellenmengen nicht-konstanter Polynome in mehr als einer Variablen unendlich sind, ist das ein Widerspruch zur strengen Minimalität von $P(x_1, x_2) \doteq 0$

„$\Leftarrow$“:

- P ist prim und damit (P) ein Primideal (da $K[X_1, X_2]$ ein faktorieller Ring ist und hier alle irreduziblen Elemente prim sind).
- Damit ist $V(P) = V((P)) \in K^2$ (das ist die von $P(x_1, x_2) \doteq 0$ definierte Menge) eine irreduzible Zariski-abgeschlossene Menge.
- Wir nehmen an, $P(x_1, x_2) \doteq 0$ ist nicht streng minimal (hat also einen MRD von $(1, m)$ mit $m > 1$).
- Sei $\phi(x_1, x_2)$ eine streng minimale $\mathcal{L}_{Ring}(K)$-Formel, die $P(x_1, x_2) \doteq 0$ impliziert, und $p \in S(K)$ ein streng minimaler Typ mit $\phi(x_1, x_2) \in p$.

Erinnerung [Bay20: 7.13]: Die Typen in $S_2(K)$ stehen in bijektiver Korrespondenz zu den Primidealen von $K[X_1, X_2]$ via

$$p \mapsto I_p := \{f(x_1, x_2) \text{ mit } f(x_1, x_2) \doteq 0 \in p\}.$$

- $V(I_p)$ hat MR von 1 (weil $V(I_p)$ definierte Menge einer Formel aus p ist) und ist irreduzibel.

- Mit Proposition 3.10 und 3.11 folgt $I_p = (Q)$ für ein $Q \in K[X_1, X_2]$.
- Wegen $P(x_1, x_2) \doteq 0 \in p$, ist $P \in (Q)$, also $Q|P$.
- Es gilt aber nicht $P|Q$, weil sonst $P(x_1, x_2) \doteq 0$ eine Teilmenge von $Q(x_1, x_2) \doteq 0$ definieren würde.
- Damit ist im Widerspruch zur Annahme P reduzibel. $\square$

Lemma 3.13

Sei $K \models$ ACF ω-saturiert, $\phi(x_1, x_2)$ mit Parametern aus K sei streng minimal. Dann ist $\phi(x_1, x_2)$ 1-äquivalent zu $P(x_1, x_2) \doteq 0$ für ein nicht-konstantes Polynom $P \in K[X_1, X_2]$.

Beweis:

- Sei $(a_1, a_2) \in L^2$ generische Lösung von $\phi(x_1, x_2)$ über K, wobei $L \succeq K$ ω-saturiert ist.
- Betrachte $C := V(I_K(a_1, a_2))$. Weil $I_K(a_1, a_2) \subseteq K[X_1, X_2]$ ein Primideal ist (vgl. Charakterisierung der Typen in ACFs aus Logik II, Bay20: 7.13), ist C irreduzibel.
- Weil $(a_1, a_2) \in C$ und $\mathrm{MR}(a_1, a_2/K) = 1$, folgt mit Proposition 3.10 und 3.11, dass $I_K(a_1, a_2) = (P)$ für ein $P \in K[X_1, X_2]$.
- Damit wird C von $P(x_1, x_2) \doteq 0$ definiert und $(a_1, a_2) \models P(x_1, x_2) \doteq 0$.
- Außerdem ist $P(x_1, x_2) \doteq 0$ streng minimal nach Lemma 3.12, weil (P) ein Primidial und damit P irreduzibel ist.
- Folglich sind $\phi(x_1, x_2)$ und $P(x_1, x_2) \doteq 0$ 1-äquivalent. $\square$

Proposition 3.14

ACF_p hat die DMP (für alle p prim und 0).

Beweis:

Sei $K \models \mathrm{ACF}_p$ ω-saturiert mit Primkörper F. Nach Hauptlemma 2.14 genügt es, die DMP für streng minimale Formeln $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ zu zeigen.

Fall $|\overline{x}| = 1$: Beobachtung 2.3.

Fall $|\overline{x}| = 2$:

Sei $\phi(x_1, x_2, \overline{a})$ streng minimal.

- Nach Lemma 3.13 ist $\phi(x_1, x_2, \overline{a})$ 1-äquivalent zu $P(x_1, x_2, \overline{b}) \doteq 0$ für ein nicht-konstantes Polynom $P \in K[X_1, X_2]$.
- Weil die Ränge der beiden Formeln gleich sind, genügt es nach Lemma 2.8 die DMP für $P(x_1, x_2, \overline{b}) \doteq 0$ zu zeigen. (Bemerkung: In Lemma 2.8 werden die gleichen Parametertupel vorausgesetzt, was hier nicht unbedingt gegeben ist, die Parameter können aber durch „künstliche“Erweiterung gleich gemacht werden.)

- Nach Lemma 3.12 ist $P(x_1, x_2, \overline{b}) \doteq 0$ genau dann streng minimal, wenn P irreduzibel ist, d.h. nicht das Produkt $P = Q_1 Q_2$ zweier nicht-konstanter Polynome $Q_1, Q_2 \in K[X_1, X_2]$ ist.
- Weil nur Polynome berücksichtigt werden müssen, deren Grade kleiner als der Grad von P sind, ist dies durch eine endliche Formel im Typ von $\overline{b}$ ausdrückbar.
- Damit hat $P(x_1, x_2, \overline{b}) \doteq 0$ die DMP.

Fall $|\overline{x}| > 2$:

Ziel: Zurückführung auf Fall $|\overline{x}| = 2$.

- Sei $\overline{b} \in K^{|\overline{x}|}$ eine generische Lösung von $\phi(\overline{x}, \overline{a})$, also $\mathrm{MR}(\overline{b}/\overline{a}) = 1$.
- O.E. $b_1 \notin \mathrm{acl}(\overline{a})$ und $\overline{b}_{>1} \in \mathrm{acl}(\overline{a}, b_1)^{<\omega}$.
- Nach Lemma 3.8 gilt $\mathrm{dcl}(\overline{a}, b_1) = F(\overline{a}, b_1)^{p^{-\infty}} =: F'$.
- $F'(\overline{b})/F'$ ist eine algebraische Erweiterung und wegen der Perfektheit von F' damit separabel.
- Nach dem Satz vom primitiven Element (3.2) existiert $c \in F'(\overline{b})$ mit $F'(\overline{b}) = F'(c)$.
- Nach Bemerkung 3.5 ist $F'(\overline{b}) = F'(c)$ auch wieder perfekt und folglich $F'(\overline{b}) = \mathrm{dcl}(\overline{a}, \overline{b})$ und $F'(c) = \mathrm{dcl}(\overline{a}, b_1, c)$. Damit:

$$\mathrm{dcl}(\overline{a}, \overline{b}) = \mathrm{dcl}(\overline{a}, b_1, c).$$

- Nach Lemma 3.9 existieren $\phi'(\overline{x}, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{a})$, $\psi(x, y, \overline{a}) \in \mathrm{tp}(b_1, c/\overline{a})$ streng minimal und eine $\overline{a}$-definierbare Bijektion $\phi'(K, \overline{a}) \to \psi(K, \overline{a})$
- Nach Fall $|\overline{x}| = 2$ hat $\psi(x, y, \overline{a})$ die DMP. Mit Lemma 2.9 hat dann auch $\phi'(\overline{x}, \overline{a})$ die DMP und mit Lemma 2.8 auch $\phi(\overline{x}, \overline{a})$. $\square$

Literatur

[Hru92] Ehud Hrushovski. Strongly minimal expansions of algebraically closed fields. *Israel Journal of Mathematics*, 79: 129-151, 1992.

[Bay20] Martin Bays. *Logik II: Model theory*. Vorlesungsskript, 2019-2020.

[Bos09] Siegfried Bosch. *Algebra*. Springer, 2009

[Hul12] Klaus Hulek. *Elementare Algebraische Geometrie*. Springer Spektrum, 2012.

[Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Springer, 2002.

[Mil05] J.S. Milne. *Algebraic Geometry*. Version 5.00. Taiaroa Publishing Erehwon, 2005.

[Pil98] Anand Pillay. Model theory of algebraically closed fields. In: *Model Theory and Algebraic Geometray*. Ed.: Elisabeth Bouscaren. Springer, 1998.

[TZ12] Katrin Tent und Martin Ziegler. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012.