Prägeometrien

Mika Weßeler

07.05.2020

Einführung

Was ist eine Prägeometrie nochmal?

Eine Prägeometrie (X, cl) ist eine Menge mit einem Abschlßoperator cl: $P(X) \to P(X)$, sodass für alle $A \subseteq X$ und $a, b \in X$ gilt:

- (Reflexivität) $A \subseteq cl(A)$
- (Endlich) cl(A) is die Vereinigung über alle cl(A'), wobei A' über alle endlichen Untermengen von A reicht
- (Transitivität) cl(cl(A) = cl(A)
- (Austausch) $a \in cl(Ab) \setminus cl(A) \to b \in cl(Aa)$

Bemerkung

Die folgenden Strukturen sind Prägeometrien:

1. Ein Vektorraum V mit dem linearen Hülle
2. Für ein Körper K mit Primkörper F, der relative algebraische Abschluß $cl(A) = F(A)^{alg}$
3. Der p-Abschluß in einem Körper K der Characteristik p>0, zB $cl(A) = K^p(A)$

Beweis

Wir beweisen Austausch zum Beispiel 2. Wir nehmen an, dass A ein Unterkörper von K ist. Wir wählen nun a,b so, dass $a \in A(b)^{alg}$.
Nun existiert ein Polynom $F \in A[X, Y]$ des $Grades \neq 0$.
Wenn wir jetzt annehmen, dass $b \notin A(a)^{alg}$, folgt, dass
$F(a, Y) = 0$.
Nun folgt $a \in A^{alg}$.

Eine Prägeometrie, in welcher Punkte und die leere Menge abgeschlossen sind, z.B. in welcher
$cl'(\emptyset) = \emptyset$ und $cl'(x) = x$ für alle $x \in X$ gilt,
heißt Geometrie.
Für jede Prägeometrie (X,cl) existiert eine Geometrie (X', cl') welche man bekommt, indem man $X' = X^\bullet / \sim$, und $cl'(A/\sim) = cl(A)^\bullet / \sim$ setzt, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $X^\bullet = X \setminus cl(\emptyset)$ definiert durch $cl(x) = cl(y)$.

Basen

Startend von einem Vektorraum V, ist die Geometrie welche wir durch die oben gezeigte Methode bekommen, der zugehörige projektiver Raum P(V).
Die wichtigtisten Eigenschaften einer Prägeometrie sind in der Tat meistens Eigenschaften der zugehörigen Geometrie.

Definition:

Sei (X, cl) eine Prägeometrie.
Eine Untergruppe A von X heißt dann

1. unabhängig, wenn $a \notin cl(A \backslash a)$ für alle $a \in A$
2. ein Erzeuger, wenn $X = cl(A)$
3. eine Basis, wenn A ein unabhängiger Erzeuger ist

Lemma

Sei (X,cl) eine Prägeometrie mit einem Erzeuger E. Jede unabhängige Teilmenge von E kann zu einer Basis in E erweitert werden.
Vorallem hat jede Prägeometrie eine Basis.

Beweis

Sei B eine unabhängige Menge. Wenn x irgendein Element in $X \setminus cl(B)$ ist, so ist $B \cup x$ wieder unabhängig. Um das zu sehen, stelle man sich ein zufälliges $b \in B$ vor. Dann ist $b \notin cl(B \setminus b)$, woher durch Austausch $b \notin cl(B \setminus b \cup x)$ gilt.
Das impliziert, dass wir für die maximal unabhängige Teilmenge B von E, wir $E \subseteq cl(B)$ und dadurch $X = cl(B)$ haben.

Definition

Sei (X, cl) eine Prägeometrie.
Jede Teilmenge S erzeugt zwei neue Prägeometrien:

1. die Beschränkung (S, cl^S)
2. die Relativierung (X, cl_S)

mit

1. $cl^S(A) = cl(A) \cap S$, modu
2. $cl_S(A) = cl(A \cup S)$,

Bemerkung

Sei A die Basis von (S, cl^S) und B die Basis von (X, cl_S) , dann ist die (disjunkte) Vereinigung $A \cup B$ die Basis von (X, cl).

Beweis

$A \cup B$ ist offensichtlich ein Erzeuger. Da B unabhängig über S ist, haben wir $b \notin cl_S(B \setminus b) = cl(A \cup B \setminus b)$ für alle $b \in B$.
Nehmen wir nun ein $a \ inA$. Wir haben zu zeigen, dass $a \notin cl(A' \cup B)$ ist, wobei $A' = A \setminus a$ ist.
Da $a \notin cl(A')$ ist, lassen wir B' die maximale Teilmenge von B mit $a \notin cl(A' \cup B')$ sein. Wenn $B' \neq B$ würde das implizieren, dass $a \in cl(A \cup B' \cup b$ für jedes $b \in B \setminus B'$.
Dies würde dann wieder implizieren, dass $b \in cl(A \cup B')$. Dies ist ein Widerspruch.

Lemma

Jede Basis einer Prägeometrie hat die selbe Kardinalität.

Beweis

Sei A unabhängig und B ein Erzeuger von X. Wir zeigen, dass $|A| \leq |B|$.

Wir nehmen zuerst an, dass A unendlich ist. Dann erweitern wir A zu einer Basis A'. Wähle für jedes $b \in B$ eine endliche Teilmenge A_b von A' mit $b = cl(A_b)$. Dies impliziert, dass B unendlich ist und $|A| \leq |A'| \leq |B|$.

Nun nehmen wir an, dass A endlich ist. Dass $|A| \leq |B|$ folgt sofort von dem folgenden Austauschprinzip:

Sein irgendein $a \in A \setminus B$ gegeben, so ist da ein $b \in B \setminus A$, so dass $A' = b \cup A \setminus a$ unabhängig ist.

Da $a \in cl(B)$ ist, kann B nicht in $cl(A \setminus a$ enthalten sein. Wähle b in B aber nicht in $cl(A \setminus a$. So folgt aus der Austauscheigenschaft, dass A' unabhängig ist.

Definition

Die Dimension dim(X) einer Prägeometrie (X,cl) ist die Kardinalität von ihrer Basis. Die eine Teilmenge S von X sei dim(S) die Dimension von (S, cl^S) und dim(X/S) die dimension von (X, cl_S)

Mit der vorherigen Bemerkung folgt nun:

Lemma

$$dim(X) = dim(S) + dim(X/S)$$

Bei unseren Standardbeispielen sind die Dimensionen:

- Die Dimension des Vectorraums
- Der Transzendenzgrad eines Körpers
- Der unvollkommene Grad eines Körper mit endlicher Charakteristik

Modularität

Definition

Wir nennen eine Prägeometrie (X, cl) modular, falls

$$dim(A \cup B) + dim(A \cap B) = dim(A) + dim(B) \qquad (C.1)$$

für alle cl-abgeschlossenen A und B.

Die Hauptbeispiele sind:

- Die triviale Prägeometrie (wenn $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$ für alle A,B)
- Vektorräume mit der Linearen Hülle

Sei K ein Körper von Transzendenzgrad ≥ 4 über dem Primkörper F.
Das folgende Argument zeigt, dass eine algebraisch abhängige Prägeometrie von K nicht modular ist.
Wähle dazu $x, y, x', y' \in K$ algebraisch unabhängig über F. Von diesen Elementen können wir $a, b \in K$ berechnen, so dass $ax + b = y$ und $ax' + b = y'$. Da die Elemente x, x', a, b den selben Teilkörper wie x, y, x', y' generieren, sind diese auch algebraisch unabhängig. Daraus folgt, dass F(x) und F(x') ismorph über $F(a, b)^{cl}$ sind, wo das hochgestellte cl den relativen algebraischen Abschluss in K anzeigt.
Dieser Isomorphismus bildet y auf y' ab und dadurch haben wir

$$F(x, y)^{cl} \cap F(a, b)^{cl} \subseteq F(x, y)^{cl} \cap F(x', y')^{cl} = F^{cl}$$

Also ist K nicht modular, da $tr.degF(x, y, a, b) + tr.degF = 3 + 0 < 2 + 2 = tr.degF(x, y) + tr.degF(a, b)$

Definition

Eine Prägeometrie (X, cl) heißt lokal modular, wenn (C.1) auch für alle abgeschlossenen Mengen A,B mit $dim(A \cap B) > 0$.

Modulare Prägeometrien

Wir nennen zwei Mengen A und B (geometrisch) unabhängig über C, wenn alle Teilmengen $A_0 \subseteq A$ und $B_0 \subseteq B$, welche beide unabhängig über C sind, disjunkt sind und deren Veeinigung wieder unabhängig über C ist.
Dann sieht man relativ einfach das Folgende:

Lemma

Für eine Prägeometrie (X, cl) sind folgende Aussagen äquivalent:

1. (X, cl) ist modular
2. Jede zwei abgeschlossenen A und B sind unabhängig über deren Schnitt
3. Für jede zwei abgeschlossenen Mengen A und B haben wir $dim(A/B)) = dim(A/A \cap B)$

Lemma

Eine Prägeometrie (X, cl) ist modular genau dann, wenn für alle a,b,B mit dim(ab) = 2, dim(ab/B) = 1, es ein $c \in cl(B)$ gibt, sodass dim(ab/c) = 1.

Beweis

Wenn (X,cl) modular ist und a,b,B wie in dem Lemma, dann sind ab und B abhängig, aber unabhängig über den Schnitt von cl(ab) und cl(B). Lass c ein Element des Schnitts sein, welcher nicht in $cl(\emptyset)$ liegt. Dann ist $dim(ab/c) = 1$.
Nehmen wir an, dass die Eigenschaften des Lemmas halten. Wir zeigen, dass die dritte Bedingung vom vorherigen Lemma erfüllt ist. Dafür nehmen wir an, dass $n = dim(A/A \cap B)$ endlich ist und induzieren nun über n. Die Fälle $n = 0, 1$ sind trivial. Wir nehmen also an, dass $n \geq 2$ ist. Sei $a_1, ..., a_n$ eine Basis von A über $A \cap B$.

Wir müssen zeigen, dass $dim(a_1...a_n/B = n$. Durch die Induktion wissen wir, dass $dim(a_1...a_{n-2}/B) = n-2$ ist. Also reicht es zu zeigen, dass $dim(a_{n-1}a_n/B') = 2$ ist, wobei B' der Abschluss von $a_1, ..., a_{n-2} \cup B$ sei.
Wenn dies nicht der Fall ist, so ist nach unserer Annahme $c \in B'$ so dass $dim(a_{n-1}a_n/c) = 1$.

Bemerkung

Eine Prägeometrie (X, cl) ist lokal modular genau dann, wenn für alle $x \in X \backslash cl(\emptyset)$ die relativierte Prägeometrie (X, cl_X) modular ist.

Beispiele

Ein affiner Teilraum eines Vektorraums V ist eine Nebenklasse eines Untervektorraums. Diese affinen Teilräume von V definieren eine lokal modulare Geometrie, welche nicht modular ist.

Dafür schaut man sich die abgeschlossenen 1- und 2-dimensionalen Teilmengen einer modulaten Prägeometrie (X,cl) als Punkte und Linien, respektivisch, an. Diese erfüllen das Veblen-Young Axiom von Projektiven Geometrien, welches sagt, dass jede Linie mindestens 3 Punkte besitzt: namentlich, 2 unterschiedliche Punkte a, b liegen auf einer eindeutigen Linien $\overline{ab}$; und für 4 unterschiedliche Punkte a, b, c, d, wenn die Linien $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ sich schneiden, so auch $\overline{ac}$ und $\overline{bd}$. Wenn die Dimension von X mindestens 4 ist, dann ist durch das Fundamentalsatz von Projektiven Geometrien dies in der Tat isomorph zu der projectiven Geometrie eines Vektorraums über einem Schiefkörper

Ein Körper mit einem Transzendenzgrad von mindestens 5 ist nicht lokal modular.
Um dies zu zeigen tauscht man in dem Beweis, dass eine algebraisch abhängige Prägeometrie von K nicht modular ist, den Primkörper F durch einen Teilkörper des Tranzendenzgrads 1 aus.