

# Das 2:3-Ei - ein praktikables Eimodell

Herbert Möller\*

## 1. EINFÜHRUNG

Da es schon zahlreiche Eimodelle gibt (siehe z. B. [11]), nehmen wir zunächst eine Abgrenzung vor.

### Praktikable Eimodelle

Ein glatter, konvexer Rotationskörper mit stetig gekrümmtem Querschnittsrand wird *praktikables Eimodell* genannt, wenn er folgende Kriterien erfüllt:

1. Er ist zur Vereinigung einer Halbkugel und eines Halbellipsoids ähnlich;
2. Er kann durch unkomplizierte Eingabe bei CAD-Programmen und bei CA-Systemen mit Plotmöglichkeit dargestellt werden;
3. Für Volumen, Oberfläche, Äquatordurchmesser und Eilinielänge gibt es explizite Formeln beziehungsweise einfache Approximationen, die alle nur von der Achslänge des Körpers abhängen.

Wir verwenden folgende Begriffe: Die Fläche zwischen der *Eikurve* und der *Achse* erzeugt durch Rotation um die Achse den *Eikörper*. Die Eikurve zusammen mit ihrer Spiegelung an der Achse bildet die *Eilinie*. Der *Äquator* des Eikörpers entsteht bei der Rotation aus demjenigen Punkt der Eikurve, der den größten Abstand von der Achse hat. Auf dem Eikörper nennen wir die Endpunkte der Achse entsprechend der jeweiligen Eilinielänge *Flachpol* und *Hochpol*.

Unser Eimodell wird zuerst geometrisch definiert und anschließend analytisch beschrieben und ausgewertet.

### Definition des 2:3-Eies

Das *2:3-Ei* ist der Rotationskörper der *kubischen Bézier-Kurve* zu dem *2:3-Viereck* über der Rotationsachse. Ein *2:3-Viereck* ist ein um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn gedrehtes Trapez, dessen linker Schenkel auf den Grundlinien senkrecht steht und bei dem die Längen der oberen und unteren Grundlinie, deren Summe die Länge des linken Schenkels ergibt, sich wie 2:3 verhalten.

\*© Copyright 2009 by H. Möller (mollerh@math.uni-muenster.de). This article may be distributed and/or modified under the conditions of the LaTeX Project Public License.

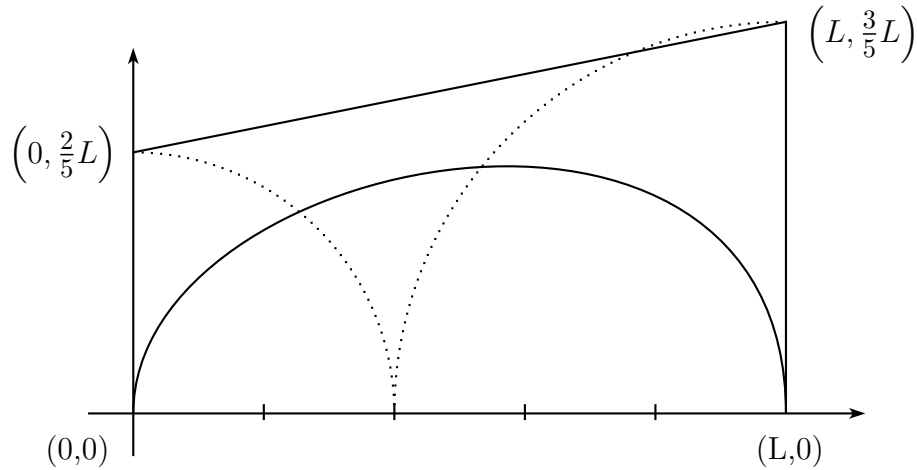


ABBILDUNG 1. Kubische Bézier-Kurve zum 2:3-Viereck

Die ABBILDUNGEN 1 bis 5 sowie 11, 12 und 14 wurden mit *Cabri-Géomètre*<sup>TM</sup> II erzeugt und mit der neuen GaPFilL-Methode (siehe [6]) in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>-picture-Umgebungen umgewandelt.

## 2. KUBISCHE BÉZIER-KURVEN

In *Wikipedia* gibt es unter dem Stichwort “Bézierkurve” eine gute Darstellung der allgemeinen Theorie mit informativen Animationen (<http://de.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zierkurve>). Der erste Absatz daraus lautet:

“In der numerischen Mathematik ist die *Bézierkurve* [be’zje...] eine parametrisch modellierte Kurve, die ein wichtiges Werkzeug im *Computer Aided Design* (Computerunterstützte Konstruktion) darstellt. Sie wurde Anfang der 1960er Jahre unabhängig voneinander von *Pierre Bézier* bei Renault und *Paul de Casteljau* bei Citroën entwickelt. Paul de Casteljau gelang zwar die Entdeckung früher, Citroën hielt seine Forschungen jedoch bis zum Ende der 1960er Jahre als Betriebsgeheimnis zurück.”

In der mathematischen Darstellung verwenden wir Vektoren anstelle der erzeugenden Punkte, weil die geometrische Bedeutung aus der Vektorgeometrie besser bekannt ist als etwa bei komplexen Zahlen.

In der mathematischen Darstellung verwenden wir Vektoren anstelle der erzeugenden Punkte, weil die geometrische Bedeutung aus der Vektorgeometrie besser bekannt ist als etwa bei komplexen Zahlen.

Ist  $t$  mit  $0 \leq t \leq 1$  der Laufparameter, so kann die durch  $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  aufgespannte *kubische Bézier-Kurve* mit den Abkürzungen

$t_1 := 1 - t$ ,  $\vec{p}'_j := t_1 \vec{p}_j + t \vec{p}_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , und  $\vec{p}''_k := t_1 \vec{p}'_k + t \vec{p}'_{k+1}$ ,  $k = 0, 1$ , in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(1) \quad \vec{p}(t) = t_1 \vec{p}''_0 + t \vec{p}''_1 = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} t_1^{3-i} t^i \vec{p}_i.$$

Da die zu den jeweiligen Pluszeichen gehörenden Linearkombinationen dieselben Koeffizienten  $t_1$  und  $t$  haben, lässt sich jeder Punkt der kubischen Bézier-Kurve durch sechs Streckenteilungen mit demselben Teilungsverhältnis  $t : t_1$  gewinnen. Wegen  $t_1 \vec{p}_j + t \vec{p}_{j+1} = \vec{p}_j + t(\vec{p}_{j+1} - \vec{p}_j)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , werden zuerst die drei “Verbindungsvektoren” von  $\vec{p}_j$  nach  $\vec{p}_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , im Verhältnis  $t : t_1$  geteilt. Sind  $\vec{p}'_j := t_1 \vec{p}_j + t \vec{p}_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , die zugehörigen “Teilungsvektoren”, so folgt die Teilung der Verbindungsvektoren  $\vec{p}''_0$  von  $\vec{p}'_0$  nach  $\vec{p}'_1$  und  $\vec{p}''_1$  von  $\vec{p}'_1$  nach  $\vec{p}'_2$  im Verhältnis  $t : t_1$ . Teilt man schließlich den Verbindungsvektor von  $\vec{p}''_0$  nach  $\vec{p}''_1$  im Verhältnis  $t : t_1$ , so erhält man den zum Parameter  $t$  gehörenden Vektor  $\vec{p}(t)$ .

Die Konstruktion einer kubischen Bézier-Kurve als Ortskurve lässt sich nun folgendermaßen durchführen. Zuerst werden vier verschiedene Punkte eingegeben, die Verbindungsstrecke des ersten und des letzten Punktes als Pfad der Ortskurve gezeichnet und darauf ein Punkt gesetzt, der das Teilungsverhältnis für alle sechs später auftretenden “Zeichnungsvektoren” festlegt. Die ersten drei Vektoren verbinden je zwei aufeinanderfolgende der eingegebenen Punkte, die nächsten beiden Vektoren liegen zwischen den drei Teilungspunkten, und der entsprechend geteilte Verbindungsvektor ergibt den zugehörigen Punkt der Ortskurve.

Alle professionellen CAD-Programme und viele Zeichenprogramme (wie z. B. das frei erhältliche ‘Draw’ in *OpenOffice*) stellen kubische Bézier-Kurven zur Verfügung. In den meisten “*dynamischen Geometrieprogrammen*” fehlt dieses Werkzeug. Deshalb wird in [5] beschrieben, wie sich in *Cabri-Géomètre II* ein Makro für kubische Bézier-Kurven programmieren lässt. Für das dynamische Geometrieprogramm *Cinderella*<sup>TM</sup> 1.2, das keine Makros kennt, geben wir im nächsten Abschnitt an, wie sich die kubische Bézier-Kurve zu dem 2:3-Viereck als Ortslinie erzeugen lässt.

### 3. ERZEUGUNG DER 2:3-EILINIE ALS ORTSLINIE

Die Konstruktionsbeschreibung ist in der folgenden weitgehend selbsterklärenden Tabelle enthalten. Sie wurde aus der in *Cinderella 1.2* verfügbaren Darstellung durch Übersetzen, Kürzen und Hinzufügen der Schrittnummern und Gleichheitszeichen gewonnen. Zwei mit *Cinderella 1.2* erzeugte interaktive Ortslinien und

eine Animation (mit drei Geschwindigkeiten) stehen im *Mathkompass* [5] wie dieser Artikel auf der Seite “Sonstiges”.

1: $A = \text{Punkt}()$	19: $C4 = \text{Kreis}(C; B)$	37: $S = \text{Schnitt}(f; q)$
2: $B = \text{Punkt}()$	20: $L = \text{Laufpunkt}(C4)$	38: $r = \text{Parall.}(e; S)$
3: $a = \text{Verbind.}(A; B)$	21: $f = \text{Parall.}(c; L)$	39: $T = \text{Schnitt}(n; r)$
4: $b = \text{Senkr.}(a; A)$	22: $M = \text{Schnitt}(a; f)$	40: $s = \text{Verbind.}(T; H)$
5: $c = \text{Senkr.}(a; B)$	23: $g = \text{Verbind.}(A; K)$	41: $t = \text{Verbind.}(R; K)$
6: $C = \text{Mittelp.}(A; B)$	24: $h = \text{Verbind.}(B; H)$	42: $u = \text{Verbind.}(R; H)$
7: $D = \text{Mittelp.}(A; C)$	25: $k = \text{Parall.}(h; M)$	43: $v = \text{Verbind.}(T; R)$
8: $C0 = \text{Kreis}(A; C)$	26: $l = \text{Parall.}(g; M)$	44: $w = \text{Parall.}(t; P)$
9: $C1 = \text{Kreis}(B; D)$	27: $N = \text{Schnitt}(b; k)$	45: $U = \text{Schnitt}(u; w)$
10: $E = \text{Schnitt}(C0; b)$	28: $O = \text{Schnitt}(c; l)$	46: $x = \text{Parall.}(s; U)$
11: $F = \text{Schnitt}(C1; c)$	29: $P = \text{Schnitt}(e; f)$	47: $V = \text{Schnitt}(v; x)$
12: $d = \text{Verbind.}(E; F)$	30: $m = \text{Verbind.}(P; O)$	48: $y = \text{Senkr.}(a; V)$
13: $G = \text{Schnitt}(a; d)$	31: $n = \text{Verbind.}(P; N)$	49: $W = \text{Schnitt}(a; y)$
14: $C2 = \text{Kreis}(A; G)$	32: $o = \text{Verbind.}(O; H)$	50: $C5 = \text{Kreis}(W; V)$
15: $C3 = \text{Kreis}(B; G)$	33: $Q = \text{Schnitt}(f; o)$	51: $X = \text{Schnitt}(C5; y, V)$
16: $H = \text{Schnitt}(C2; b)$	34: $p = \text{Parall.}(e; Q)$	52: $E0 = \text{Ortsl.}(L; C4; V)$
17: $K = \text{Schnitt}(C3; c)$	35: $R = \text{Schnitt}(m; p)$	53: $E1 = \text{Ortsl.}(L; C4; X)$
18: $e = \text{Verbind.}(H; K)$	36: $q = \text{Verbind.}(N; K)$	

In *Cinderella 1.2* und vielen anderen Geometrieprogrammen ist die Mittelpunktbildung die einzige direkte Streckenteilung. Deshalb wird mit den Schritten 4 bis 13 zunächst die Strecke, die die “freien” Punkte  $A$  und  $B$  verbindet, im Verhältnis 2:3 geteilt, wobei die Schnittpunkte  $E$  und  $F$  sich nicht auf derselben Seite der Geraden  $a$  befinden. Dagegen liegen die Schnittpunkte  $H$  und  $K$ , mit denen bis Schritt 18 das 2:3-Viereck konstruiert wird, auf derselben Seite von  $a$ .

Der “Laufpunkt”  $L$  für die Ortslinie kann bei *Cinderella 1.2* nicht auf einer Strecke sondern nur auf einer Geraden oder einem Kreis liegen. Wir wählen den Kreis mit dem Durchmesser  $AB$ , weil sich dann der Teilungspunkt  $M$  von  $AB$  mit Hilfe von  $f$  durch Projektion von  $L$  ergibt. In der folgenden **ABBILDUNG 2** zu den Schritten 23 bis 29 wird das durch  $M$  bestimmte Teilungsverhältnis zunächst auf die (“gerichteten”) Strecken  $AH$ ,  $HK$  und  $KB$  übertragen.

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sind anstelle der Geraden von *Cinderella 1.2* nur die relevanten Strecken mit den gleichen Bezeichnungen eingezeichnet.

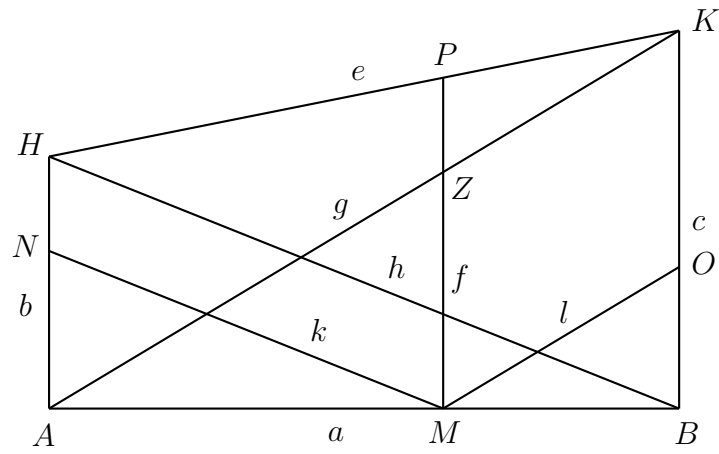


ABBILDUNG 2. Die ersten drei Teilungspunkte  $N$ ,  $P$  und  $O$

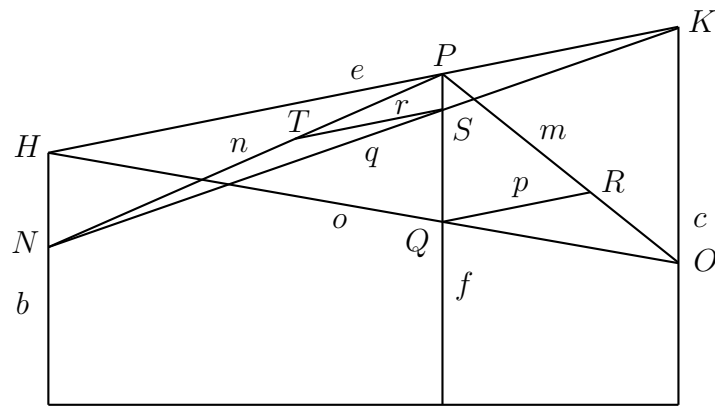


ABBILDUNG 3. Die nächsten beiden Teilungspunkte  $T$  und  $R$

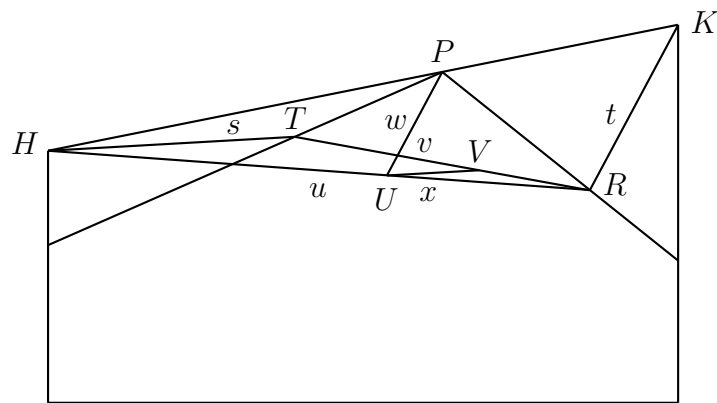


ABBILDUNG 4. Der letzte Teilungspunkt  $V$

Da die Teilungen auf wiederholten Anwendungen des *ersten Strahlensatzes* beruhen, geben wir im Folgenden zu jeder der drei Abbildungen die Sequenz der parallelen Strecken an, wobei der jeweils zuletzt genannte Punkt der neue Teilungspunkt ist.

In den Schritten 23 bis 29 (ABBILDUNG 2) werden die Parallelitäten  $BH \parallel MN$ ,  $AK \parallel MO$ ,  $BK \parallel MZ$  und  $AH \parallel ZP$  verwendet, wobei  $Z$  ein Hilfspunkt ist. ABBILDUNG 3 mit den Schritten 30 bis 39 enthält  $KO \parallel PQ$ ,  $HP \parallel QR$ ,  $HN \parallel PS$  und  $KP \parallel ST$ . In ABBILDUNG 4 zu den Schritten 40 bis 47 treten schließlich die Parallelitäten  $KR \parallel PU$  und  $HT \parallel UV$  auf.

In den letzten sechs Schritten wird der Spiegelpunkt  $X$  von  $V$  bezüglich  $a$  konstruiert und mit  $V$  und  $X$  jeweils eine Ortslinie erzeugt. ABBILDUNG 5 zeigt diese aus zwei Ortslinien zusammengesetzte 2:3-Eilinie.

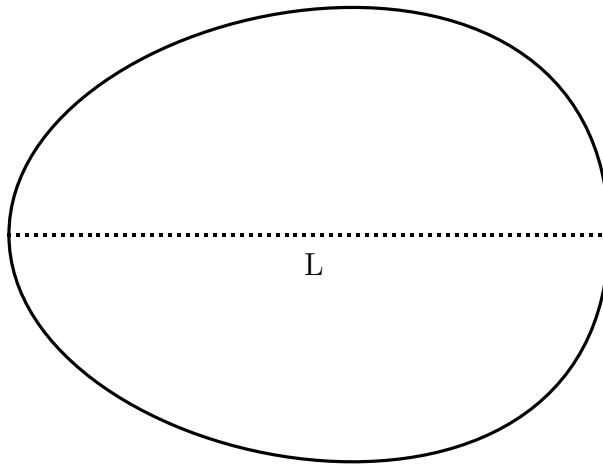


ABBILDUNG 5. 2:3-Eilinie mit der Achslänge  $L$

#### 4. PARAMETERDARSTELLUNG DER 2:3-EIKURVE

Setzt man die Punktkoordinaten des 2:3-Vierecks aus ABBILDUNG 1 als Vektorkomponenten in die Summe von (1) ein, so erhält man mit den “*Koordinatenfunktionen*”

$$(2) \quad p := (t \rightarrow t^2(3 - 2t), [0, 1]), \quad q := \left(t \rightarrow \frac{3}{5}t(1 - t)(t + 2), [0, 1]\right)$$

die 2:3-Eikurve als Punktmenge

$$(3) \quad \mathcal{E}_L := \{(Lp(t), Lq(t)); t \in [0, 1]\}.$$

Die folgende **ABBILDUNG 6** des Eikörpers wurde mit Hilfe von (2) durch das kostenlos erhältliche CAS *Sage* [9] (<http://www.sagemath.org/download.html>) berechnet und geplottet. Auch die Abbildungen 7 bis 10, 13 und 15 bis 20 wurden mit *Sage* erzeugt, wobei für die 3D-Darstellungen das von *Sage* zur Verfügung gestellte Programm *Jmol* verwendet wurde.

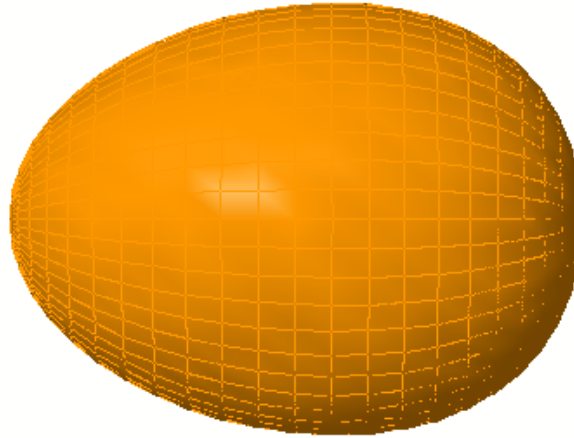


ABBILDUNG 6. 3D-Darstellung des 2:3-Eikörpers mit Gitterlinien

Für die Funktion  $p$  gilt  $\dot{p}(t) = 6t(1-t)$ , wobei hier und im Folgenden der  $\dot{\phantom{p}}$  über einem Funktionssymbol wie üblich die Ableitung nach dem Parameter  $t$  bedeutet. Also ist  $p$  streng monoton wachsend und damit umkehrbar (**ABBILDUNG 7**).

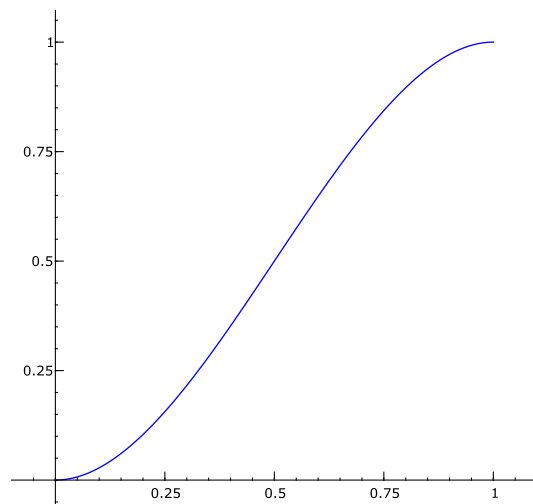


ABBILDUNG 7. Graph  $p$

Die Gleichung

$$(4) \quad p(t) = -2t^3 + 3t^2 = x$$

lässt sich nicht durch die *Cardano-Formeln* mit Hilfe zweiter und dritter Wurzeln auflösen, weil der *Casus irreducibilis* vorliegt. In diesem Fall kann man aber die Lösungen durch trigonometrische Funktionen beschreiben. Die Genese beruht darauf, dass  $\cos(n \arccos z)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_1$  als Polynom  $T_n(z)$  darstellbar ist. Offensichtlich gilt  $T_1(z) = z$ . Das Additionstheorem für  $\cos$  zusammen mit  $\sin(-s) = -\sin s$  ergibt

$$\cos(r+s) + \cos(r-s) = 2(\cos r)(\cos s) \text{ für alle } r, s \in \mathbb{R}.$$

Mit  $r = s = v$  folgt  $\cos(2v) = 2\cos^2 v - 1$ , also

$$T_2(z) = 2z^2 - 1.$$

Für  $r = nv$  und  $s = v$  erhalten wir aus

$$\cos(nv+v) + \cos(nv-v) = 2\cos(nv)\cos v$$

die Rekursionsformeln

$$T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z),$$

sodass sich die Polnomeigenschaft von  $T_n(z) := \cos(n \arccos z)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_1$  durch vollständige Induktion ergibt. Diese Polynome heißen *Tschebyscheff-Polynome erster Art*. Insbesondere ist

$$(5) \quad T_3(z) = 2zT_2(z) - T_1(z) = 4z^3 - 3z.$$

Um Gleichung (4) mit (5) auflösen zu können, setzen wir  $t = z + \frac{1}{2}$  und multiplizieren die entstehende Gleichung mit  $-2$ . Dann erhalten wir

$$1 - 2x = 4z^3 - 3z = \cos(3 \arccos z).$$

Da  $\cos$  die Periode  $2\pi$  hat, folgt

$$3 \arccos z = \arccos(1 - 2x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen  $t = x$  für  $x \in \{0, 1\}$  ergibt Einsetzen von  $k \in \{-1, 0, 1\}$ , dass  $k = -1$  die richtige der drei möglichen Lösungen liefert. Die eindeutig bestimmte

Umkehrfunktion  $u := \overset{-1}{p}$  von  $p$  erhält man damit durch

$$(6) \quad u(x) = t = \cos\left(\frac{1}{3}(\arccos(1 - 2x) - 2\pi)\right) + \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Sie wird nur verwendet, um aus den  $f := q \circ u$  enthaltenden Formeln für die Eikurvenlänge sowie für das Volumen und die Oberfläche des Eikörpers die Integraldarstellungen mit  $p$  und  $q$  herzuleiten. Für  $L = 1$  gilt natürlich  $\mathcal{E}_1 = \text{Graph } f$ .



## 5. BERECHNUNGEN

Da der analytische Teil dieses Aufsatzes später zum sechsten Kapitel (“Anwendungen”) des E-Buchs “*Elementaranalysis*” gehören soll, verwenden wir hier die Bezeichnungen und Sätze aus dem gleichnamigen E-Skript [7], das im *Mathkompass* zur Verfügung steht. Alle hier benutzten und hergeleiteten Aussagen gelten mit den entsprechenden Bezeichnungen auch in der Cauchy-Analysis.

In der Reihenfolge des Abschnitts 4.4 von [7] leiten wir zunächst die Formeln für die *Eikurvenlänge*  $K(L)$ , für das *Eivolumen*  $V(L)$  und für die *Eioberfläche*  $O(L)$  her. Im Folgenden beziehen sich die Seitenangaben in eckigen Klammern auf [7].

**Eikurvenlänge**

Aufgrund des *Ableitungssatzes* [*Kettenregel*, Seite 58] und des *Umkehrsatzes* [Seite 77] ist  $f := (x \rightarrow q(u(x)), [0, 1])$  auf jedem Intervall  $[a, b]$  mit  $0 < a < b < 1$  ableitbar<sup>1</sup>. Der *Bogenlängensatz* [Seite 250] ergibt dann im Fall  $L = 1$  für  $f|_{[a, b]}$  die Bogenlänge

$$(7) \quad \mathcal{L}(\text{Graph } f|_{[a, b]}) = \int_a^b \left( x \rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right).$$

Um die Bogenlänge von  $\text{Graph } f$  zu erhalten, benötigt man einen Grenzübergang, der analog auch für die beiden folgenden Berechnungen durchzuführen ist. Dazu sei  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige geometrische Nullfolge mit  $0 < s_n < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und es sei  $a_n := p(s_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Einerseits ist  $(p(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$  als gliedweise Summe von geometrischen Nullfolgen eine geometrische Nullfolge, und andererseits kann wegen  $p(1-t) = 1-p(t)$  als obere Integralgrenze  $1-a_n = 1-p(s_n) = p(1-s_n)$  gewählt werden.

Die *Substitutionsregel* des *Integrationsatzes* [Seite 194] ergibt mit der Substitution  $x = p(t)$  die Gleichung

$$(8) \quad I_n := \int_{a_n}^{1-a_n} \left( x \rightarrow \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right) = \int_{s_n}^{1-s_n} \left( t \rightarrow \sqrt{1 + (f'(p(t)))^2} \dot{p}(t) \right).$$

Die *Kettenregel* und der *Umkehrsatz* liefern

$$(9) \quad f'(x) = \dot{q}(u(x)) u'(x) = \frac{\dot{q}(u(x))}{\dot{p}(u(x))}.$$

<sup>1</sup> In den gescannten Teilen des E-Skripts wird anstelle von “ableitbar” noch “elementar differenzierbar” gebraucht.

Aus (8) folgt also

$$(10) \quad I_n = \int_{s_n}^{1-s_n} \left( t \rightarrow \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \right) \text{ mit}$$

$$(11) \quad \dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t) = (6t(1-t))^2 + \frac{9}{25} (-3t^2 - 2t + 2)^2 > 0 \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Mit dem *Umkehrsatz* [Seite 77] folgt, dass

$$\left( t \rightarrow \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}, [0, 1] \right)$$

ableitbar ist. Aufgrund des *Stammfunktionensatzes* [Seite 199] stellt auch

$$\left( s \rightarrow \int_s^{1-s} \left( t \rightarrow \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \right), [0, 1] \right)$$

eine ableitbare Funktion dar. Mit (10) ergeben der *Stetigkeitssatz* [Seite 64] und der *Limesvertauschungssatz* [Seite 128] schließlich, dass  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geometrisch konvergent ist und dass der Grenzwert nicht von der Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abhängt. Man kann also  $\mathcal{L}(\text{Graph } f) := \lim (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren und erhält

$$(12) \quad \mathcal{L}(\text{Graph } f) = \int_0^1 \left( t \rightarrow \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \right).$$

Für beliebiges  $L > 0$  gilt  $\mathcal{E}_L = \text{Graph} \left( x \rightarrow Lf\left(\frac{x}{L}\right), [0, L] \right)$ . Das obige Vorgehen und eine zusätzliche Anwendung der *Kettenregel* und der *Substitutionsregel* ergeben

$$\int_{La_n}^{L(1-a_n)} \left( x \rightarrow \sqrt{1 + \left( Lf'\left(\frac{x}{L}\right) \right)^2} \right) = LI_n.$$

Mit der entsprechenden Definition von  $K(L) := \mathcal{L}(\mathcal{E}_L)$  als Limes von  $(LI_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und mit (12) folgt dann

$$(13) \quad \begin{aligned} K(L) &= L \int_0^1 \left( t \rightarrow \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \right) \\ &= \frac{3}{5} L \int_0^1 \left( t \rightarrow \sqrt{109t^4 - 188t^3 + 92t^2 - 8t + 4} \right) \\ &= 1,397153345 \dots L. \end{aligned}$$

Hier und auch bei den folgenden beiden Herleitungen zeigt sich als besonderer Vorteil der Parameterdarstellung, dass komplizierte “uneigentliche” Integrale in einfache gewöhnliche Integrale übergehen.

## Volumen des Eikörpers

Mit den obigen Bezeichnungen ergibt der *Rauminhaltssatz* [Seite 253] für den Rotationskörper  $\text{Rot } f|[a, b]$  im Fall  $L = 1$  den Rauminhalt

$$(14) \quad \mathcal{V}(\text{Rot } f|[a, b]) = \pi \int_a^b (x \rightarrow f^2(x)).$$

Mit dem entsprechenden Grenzprozess wie oben erhalten wir

$$(15) \quad J_n := \pi \int_{La_n}^{L(1-a_n)} \left( x \rightarrow \left( Lf\left(\frac{x}{L}\right) \right)^2 \right) = \pi L^3 \int_{s_n}^{1-s_n} (t \rightarrow \dot{p}(t)q^2(t)).$$

Da  $\dot{p}(t)q^2(t)$  ein Polynom ist, kann explizit integriert und der Grenzwert von  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gebildet werden. Definiert man  $V(L) := \mathcal{V}(\text{Rot } \mathcal{E}_L)$  durch diesen von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängigen Grenzwert, so gilt

$$(16) \quad \begin{aligned} V(L) &= \pi L^3 \int_0^1 (t \rightarrow \dot{p}(t)q^2(t)) \\ &= \frac{54}{25} \pi L^3 \int_0^1 (t \rightarrow -t^8 - t^7 + 5t^6 + t^5 - 8t^4 + 4t^3) \\ &= \frac{339}{3500} \pi L^3 = 0,3042856884 \dots L^3. \end{aligned}$$

Da  $\pi$  die besonders gute Näherung  $\frac{355}{113}$  besitzt, deren Nenner 339 teilt, lässt sich der Faktor  $\frac{339}{3500} \pi$  durch  $\frac{213}{700}$  mit dem sehr kleinen Fehler  $0 < \frac{213}{700} - \frac{339}{3500} \pi < 3 \cdot 10^{-8}$  approximieren, wobei der Zähler 213 an 2:3 erinnert.

## Oberfläche des Eikörpers

Zur Bestimmung der ‘‘Mantelfläche’’ des Rotationskörpers  $\text{Rot } f|[a, b]$  verwenden wir den *Mantelflächensatz* [Seite 255]:

$$(17) \quad \mathcal{M}(\text{Rot } f|[a, b]) = 2\pi \int_a^b \left( x \rightarrow f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \right).$$

Unter Berücksichtigung der ‘‘Seitenflächen’’ definieren wir die Glieder der approximierenden ‘‘Oberflächenfolge’’:

(18)

$$\begin{aligned}
K_n &:= 2\pi \int_{La_n}^{L(1-a_n)} \left( x \rightarrow Lf\left(\frac{x}{L}\right) \sqrt{1 + \left(Lf'\left(\frac{x}{L}\right)\right)^2} \right) + \pi L^2 \left( f^2(a_n) + f^2(1-a_n) \right) \\
&= 2\pi L^2 \int_{s_n}^{1-s_n} \left( t \rightarrow q(t) \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \right) + \pi L^2 \left( q^2(s_n) + q^2(1-s_n) \right).
\end{aligned}$$

Die geometrische Konvergenz von  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ergibt sich wie bei der Eikurvenlänge. Da  $\lim_{n \in \mathbb{N}} \left( q^2(s_n) + q^2(1-s_n) \right) = 0$  gilt, definieren wir die *Oberfläche*  $O(L)$  von Rot  $\mathcal{E}_L$  durch den von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängigen Grenzwert des Integralteils von  $K_n$  und erhalten

$$\begin{aligned}
(19) \quad O(L) &= 2\pi L^2 \int_0^1 \left( t \rightarrow q(t) \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} \right) \\
&= \frac{18}{25} \pi L^2 \int_0^1 \left( t \rightarrow (-t^3 - t^2 + 2t) \sqrt{109t^4 - 188t^3 + 92t^2 - 8t + 4} \right) \\
&= 2,223034805 \dots L^2.
\end{aligned}$$

### Position, Durchmesser und Umfang des Eiäquators

Definitionsgemäß liegt der Mittelpunkt des Äquators an der Maximumstelle von  $\left( x \rightarrow Lf\left(\frac{x}{L}\right), [0, L] \right)$ . Nach (9) gilt

$$(20) \quad \left. \frac{d}{dx} \left( Lf\left(\frac{x}{L}\right) \right) \right|_{x=Lp(t)} = \dot{q} \left( u(p(t)) \right) u'(p(t)) = \frac{\dot{q}(t)}{\dot{p}(t)}.$$

Wegen  $\dot{p}(t) \neq 0$  für alle  $t$  mit  $0 < t < 1$  muss der “Maximumparameter”  $t_m$  die positive Nullstelle von  $\dot{q}(t) = \frac{3}{5}(-3t^2 - 2t + 2)$  sein. Also ist

$$(21) \quad t_m = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1) = 0,5485837703 \dots$$

Dieser Parameter wird später auch gebraucht, um die “Kuppeln” zu plotten, die durch Zerschneiden des 2:3-Eies entlang der Äquatorebene entstehen.

Durch Einsetzen ergibt sich die *Äquatorposition*

$$(22) \quad P(L) := Lp(t_m) = \frac{2}{27} \left( 58 - 19\sqrt{7} \right) L = 0,572646302 \dots L$$

und der *Äquatordurchmesser*

$$(23) \quad D(L) := 2Lq(t_m) = \frac{4}{45} (7\sqrt{7} - 10) L = 0,7573563713 \dots L.$$

Daraus folgt schließlich der *Äquatorumfang*

$$(24) \quad U(L) := \pi D(L) = 2,379305212 \dots L.$$

## 6. KRÜMMUNGSFUNKTION UND EVOLUTE

Für  $L \neq 1$  geht  $\mathcal{E}_L$  durch eine zentrische Streckung oder Stauchung aus  $\mathcal{E}_1$  hervor. Damit lässt sich auch die Aussage von (20) erklären, dass die Ableitung von  $Lf\left(\frac{x}{L}\right)$  an der Stelle  $x = Lp(t)$  nicht von  $L$  abhängt. Deshalb genügt es in diesem Abschnitt, den Fall  $L = 1$  zu betrachten.

Als *Krümmung* eines Kreises bezeichnet man den reziproken Wert des Kreisradius. Um einer Kurve in einem festen Kurvenpunkt  $P$  eine Krümmung zuzuordnen, sucht man deshalb einen Kreis, der die Kurve an dieser Stelle “möglichst gut” approximiert. Dazu muss der Kreis durch  $P$  verlaufen und dort dieselbe Tangente wie die Kurve haben. Damit liegt der Mittelpunkt auf der entsprechenden “Normalen” der Kurve.

Ist die Kurve Graph einer zweimal ableitbaren Funktion, so gibt es unter den unendlich vielen verbleibenden Kreisen genau einen, bei dem in  $P$  auch die zweite Ableitung mit derjenigen der Kurvenfunktion übereinstimmt. Für diesen “*Krümmungskreis*” müssen die Mittelpunktkoordinaten und der Radius berechnet werden. Durch den reziproken Wert dieses “*Krümmungsradius*” wird dann der Betrag der Krümmung in  $P$  definiert, während sich das Vorzeichen durch die “Tangentenbewegung” erklären lässt.

Dieses Programm können wir mit (2) und mit der üblichen Parameterdarstellung der Kreise durchführen, wobei

$$g(s) := a + r \cos s \text{ und } h(s) := b + r \sin s \text{ mit } 0 \leq s < 2\pi$$

die Koordinatenfunktionen des Kreises mit dem Mittelpunkt  $(a, b)$  und dem Radius  $r$  seien. Ist  $t_0$  der Parameterwert des Punktes  $P$  auf  $\mathcal{E}_1$  und  $s_0$  der entsprechende Parameterwert von  $P$  als Kreispunkt, so setzen wir zur Abkürzung

$$p_i := p^{(i)}(t_0), \quad q_i := q^{(i)}(t_0), \quad g_i := g^{(i)}(s_0) \text{ und } h_i := h^{(i)}(s_0), \quad i = 0, 1, 2,$$

wobei die “nullte” Ableitung die betreffende Funktion bedeutet und die übrigen Ableitungen jeweils nach  $t$  beziehungsweise  $s$  gebildet werden.

Aus der Bedingung  $P = (p_0, q_0) = (g_0, h_0)$  folgt

$$(25) \quad p_0 - a = r \cos s_0 = h_1 = -g_2 \quad \text{und} \quad q_0 - b = r \sin s_0 = -g_1 = -h_2.$$

Als Quadratsumme ergibt sich die implizite Form der Kreisgleichung

$$(26) \quad r^2 = (p_0 - a)^2 + (q_0 - b)^2 = h_1^2 + g_1^2.$$

Wegen (20) stellt  $\frac{q_1}{p_1}$  die Tangentensteigung von  $\mathcal{E}_1$  in  $P$  dar. Für  $q_1 \neq 0$  ist dann  $-\frac{p_1}{q_1}$  die Steigung der Normalen in  $P$ . Mit der ‘‘Punkt-Richtungsform’’ der Geraden folgt die *Normalengleichung*

$$(27) \quad (x - p_0)p_1 + (y - q_0)q_1 = 0,$$

die auch für  $q_1 = 0$  gilt. Dass der Kreismittelpunkt auf der Normalen liegt, ist wegen (25) gleichbedeutend mit der Übereinstimmung der Tangentensteigungen

$$(28) \quad \frac{q_1}{p_1} = \frac{h_1}{g_1}.$$

Die zweite Ableitung von  $f$  erhalten wir aus (20) mit der *Quotientenregel* des *Ableitungssatzes* [Seite 58] und mit dem *Umkehrsatz* [Seite 77]:

$$(29) \quad \left. \frac{d}{dx}(f'(x)) \right|_{x=p_0} = \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}(t)}{\dot{p}(t)} \right) \frac{1}{\dot{p}(t)} \right|_{t=t_0} = \frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{p_1^3}.$$

Analog ergibt sich die zweite Ableitung der Funktionsdarstellung des Kreises ausgedrückt durch die Ableitungen der Koordinatenfunktionen:

$$(30) \quad \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{h'(s)}{g'(s)} \right) \frac{1}{g'(s)} \right|_{s=s_0} = \frac{g_1 h_2 - h_1 g_2}{g_1^3}.$$

Durch Gleichsetzen von (29) und (30) sowie mit (25) und (28) folgt

$$\frac{p_1 q_2 - q_1 p_2}{p_1^3} = \frac{g_1 h_2 - h_1 g_2}{g_1^3} = \frac{g_1^2 + h_1^2}{g_1^3} = \frac{1}{g_1} \left( 1 + \frac{h_1^2}{g_1^2} \right) = \frac{1}{g_1} \left( 1 + \frac{q_1^2}{p_1^2} \right).$$

Daraus und mit (28) ergibt sich

$$(31) \quad g_1 = p_1 \frac{p_1^2 + q_1^2}{p_1 q_2 - q_1 p_2} \quad \text{und} \quad h_1 = q_1 \frac{p_1^2 + q_1^2}{p_1 q_2 - q_1 p_2}, \quad \text{wobei}$$

$$(32) \quad p_1 q_2 - q_1 p_2 = -18 \left( t_0^2 - \frac{4}{5} t_0 + \frac{2}{5} \right) \leq -\frac{108}{25} \quad \text{für alle } t_0 \in [0, 1] \text{ gilt.}$$

Setzen wir  $g_1$  und  $h_1$  in (26) ein, so erhalten wir

$$(33) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{(p_1 q_2 - q_1 p_2)^2}{(p_1^2 + q_1^2)^3}.$$

Wie oben angekündigt definieren wir durch  $\frac{1}{r}$  den Betrag der Krümmung in  $P$ .

Anschaulich hat eine Kurve “positive Krümmung”, wenn sie eine “Linkskurve” beschreibt, weil bei wachsenden Parameterwerten der Schnittpunkt der Tangente in  $P$  mit einem Kreis um  $P$  einen “positiven mathematischen Umlaufssinn” hat. Da die 2:3-Eikurve eine Rechtskurve darstellt und wegen (32) und (33) ist also

$$(34) \quad \varkappa := \left( t \rightarrow \frac{\dot{p}(t)\ddot{q}(t) - \dot{q}(t)\ddot{p}(t)}{(\sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)})^3}, [0, 1] \right)$$

die zweite Koordinatenfunktion der “Krümmungskurve” von  $\mathcal{E}_1$ . Da der Zähler und der Radikand Polynome darstellen und da wegen (11)  $\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t) > 0$  gilt, ist  $\varkappa$  eine elementar stetige Funktion.

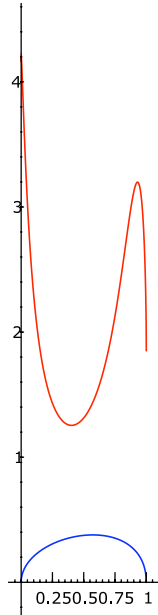


ABBILDUNG 8.  $\mathcal{E}_1$  und Graph  $|\varkappa \circ u|$

Wegen der Spiegelsymmetrie der Eilinie schließen die Krümmungswerte des unteren Teils stetig an die von  $\mathcal{E}_1$  an. Damit ist die für ein praktikables Eimodell geforderte Krümmungsbedingung erfüllt.

Mit den Ableitungseigenschaften ergeben sich auch die *Glattheit* und die *Konvexität* der Eikurve, wobei die Glattheit mit der Existenz der ersten Ableitung äquivalent ist, während die Konvexität wegen (32) aus der Nullstellenfreiheit der zweiten Ableitung folgt. Da in den Intervallendpunkten senkrechte Tangenten vorliegen, werden die beiden geometrischen Eigenschaften durch die Rotation auf den Eikörper übertragen.

Als Nebenergebnis erhalten wir mit (25) und (31) die Mittelpunkte der Krümmungskreise von  $\mathcal{E}_1$  in Abhängigkeit von  $t$ . Eine aus solchen Mittelpunkten bestehende Ortskurve heißt “*Evolute*”. Ihre Parameterdarstellung ist hier also

$$a(t) := p(t) - \dot{q}(t) \frac{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}{\dot{p}(t)\ddot{q}(t) - \dot{q}(t)\ddot{p}(t)}, \quad b(t) := q(t) + \dot{p}(t) \frac{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}{\dot{p}(t)\ddot{q}(t) - \dot{q}(t)\ddot{p}(t)}.$$

In ABBILDUNG 9 sind zusätzlich die extremalen Krümmungsradien eingezeichnet. Sie gehören zu den Parameterwerten  $t_1 = 0,0163323359\dots$ ,  $t_2 = 0,434742614\dots$  und  $t_3 = 0,8385885969\dots$ . Abbildung 8 lässt also nicht erkennen, dass der kleinste Krümmungsradius und damit die betragsmäßig größte Krümmung dicht neben dem Hochpol angenommen wird.

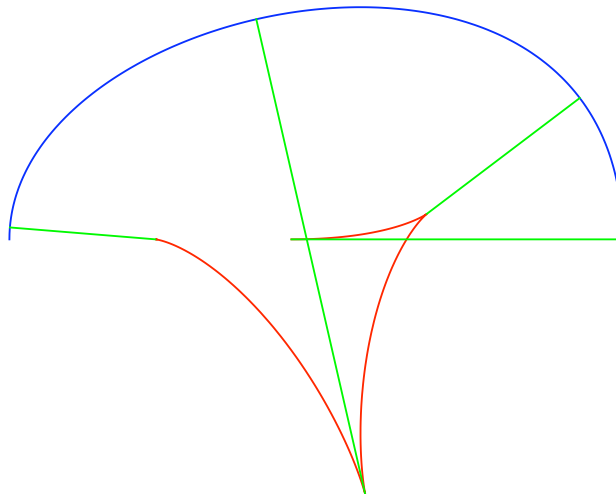


ABBILDUNG 9.  $\mathcal{E}_L$  und Evolute mit extremalen Krümmungsradien

## 7. SCHWERPUNKT, NEIGUNG UND ROLLKREIS

### Schwerpunkt

Die Mechanik der starren Körper beginnt mit der Untersuchung von Gleichgewichtsbedingungen. Der einfachste Fall ist ein zweiarmiger Hebel im Schwerfeld. Greifen an den Enden der Arme mit den Längen  $r_1$  und  $r_2$  die Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  an, so besteht Gleichgewicht, wenn  $K_1 r_1 = K_2 r_2$  gilt. Denkt man sich auf der  $x$ -Achse zwei Körper mit den Koordinaten  $x_i$  und den Massen  $m_i$ ,  $i = 1, 2$ , durch eine “gewichtlose” Stange verbunden, so tritt unter der Wirkung des Gewichts keine Drehung ein, wenn die Stange an dem Punkt  $S$  unterstützt wird, dessen Koordinate  $x_s$  die obige Hebelbedingung in der Form



$$(35) \quad (x_1 - x_s) g m_1 + (x_2 - x_s) g m_2 = 0$$

erfüllt, wobei  $g$  die Fallbeschleunigung ist, die in der Kraft-Masse-Beziehung  $K_i = g m_i$ ,  $i = 1, 2$ , auftritt. Der Punkt  $S$  heißt *Schwerpunkt* der beiden Körper.

Für die Verallgemeinerung auf endlich viele ‘‘Massepunkte’’ im Raum verwendet man zweckmäßigerweise Koordinatenvektoren. Außerdem benutzt man für die Massepunkte das ‘‘Denkmodell’’ der ‘‘starren, gewichtslosen, um jede Achse drehbaren Verbindung’’. Sind  $\vec{x}_i$  die Koordinatenvektoren der Punkte mit den Massen  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so ist der Schwerpunkt  $S$  mit dem Koordinatenvektor  $\vec{s}$  dadurch ausgezeichnet, dass bezüglich jeder nicht senkrechten Achse  $A$  durch  $S$  die Vektorsumme aller ‘‘Drehmomente’’  $(\vec{x}_i - \vec{s}) \times (m_i \vec{g}_A)$ , die durch die jeweils zu  $A$  senkrechten Schwerkraftkomponenten  $m_i \vec{g}_A$  bewirkt werden, den Nullvektor ergibt.

Aufgrund der Definition des Vektorprodukts (siehe z. B. [8], Seite 20) erhält man

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i - \vec{s}) \right) \times \vec{g}_A = \vec{0},$$

woraus schon für drei linear unabhängige Vektoren  $\vec{g}_A$  die notwendige Bedingung

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i - \vec{s}) = \vec{0}$$

folgt, aus der sich eindeutig

$$(36) \quad \vec{s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i$$

ergibt.

Um zu homogenen, starren Körpern und insbesondere zu Rotationskörpern zu gelangen, formen wir (36) um, indem wir die Schwerpunktvektoren zu beliebigen Teilmengen der Massepunkte einführen. Dazu seien  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_h$  paarweise disjunkte Indexmengen mit  $\mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_h = \{1, \dots, n\}$ . Zu jeder Indexmenge  $\mathcal{I}_k$  mit  $k \in \{1, \dots, h\}$  definieren wir  $M_k := \sum_{j \in \mathcal{I}_k} m_j$  und  $\vec{y}_k := \frac{1}{M_k} \sum_{j \in \mathcal{I}_k} m_j \vec{x}_j$ . Aus (36) erhalten wir dann durch Umordnen und Zusammenfassen

$$(37) \quad \vec{s} = \frac{1}{\sum_{k=1}^h M_k} \sum_{k=1}^h M_k \vec{y}_k.$$

Einen homogenen, starren Körper denkt man sich zunächst in  $n$  zusammenhängende Teilbereiche zerlegt, die Gesamtmasse jedes dieser Teilbereiche in einem

Punkt des Bereichs konzentriert und für dieses aus  $n$  Punkten bestehende Massensystem die drei Schwerpunktkoordinaten gebildet. Strebt bei unbeschränkt wachsendem  $n$  der größte Durchmesser der Teilbereiche gegen Null, so erhält man bei geeigneten Körperformen für jede der drei Schwerpunktkoordinaten eine Darstellung als “Gebietsintegral”, das sich in vielen Fällen in Form von drei geschachtelten Integralen schreiben lässt.

Im Falle eines homogenen, konvexen Rotationskörpers mit elementar stetiger Erzeugungskurve können wir diesen Weg abkürzen, indem wir für die Kreisscheiben, die bei der Herleitung des *Rauminhaltssatzes* [Seite 253] auftreten, Volumen und Schwerpunkt berechnen. Beides lässt sich in (37) einsetzen, nachdem die konstante Massendichte herausgekürzt ist, so dass anstelle der Massen  $M_k$  die zugehörigen Volumina  $V_k$  treten. Eine Kreisscheibe mit dem Radius  $r$  und mit der Dicke  $d$  hat das Volumen  $\pi r^2 d$ . Da die Kreisscheibe punktsymmetrisch zum Mittelpunkt  $M$  ihrer Achse ist, stellt  $M$  auch den Schwerpunkt von je zwei Massepunkten dar, die durch Punktspiegelung an  $M$  ineinander übergehen. Insbesondere liegen diese Schwerpunkte alle auf der Achse des Rotationskörpers.

Für  $\text{Rot } f|[a, b]$  folgt dann aus (37) mit dem analogen Grenzübergang wie bei der Herleitung des *Rauminhaltssatzes* die Position des Schwerpunkts auf der Achse

$$(38) \quad \mathcal{S}(\text{Rot } f|[a, b]) = \frac{\pi}{\mathcal{V}(\text{Rot } f|[a, b])} \int_a^b (x \rightarrow x f^2(x)).$$

Führt man denselben Grenzprozess wie bei der Volumenbestimmung durch und definiert den Schwerpunktabstand  $S(L) := \mathcal{S}(\text{Rot } \mathcal{E}_L)$  vom Hochpol durch den entsprechenden Grenzwert, so erhält man

$$(39) \quad \begin{aligned} S(L) &= \frac{\pi L^4}{V(L)} \int_0^1 (t \rightarrow p(t) \dot{p}(t) q^2(t)) \\ &= \frac{2520}{113} L \int_0^1 (t \rightarrow 2t^{11} - t^{10} - 13t^9 + 13t^8 + 19t^7 - 32t^6 + 12t^5) \\ &= \frac{659}{1243} L = 0,5301689460 \dots L. \end{aligned}$$

## Berührkreis

In den Ruhepositionen auf einer waagerechten Unterlage hat ein 2:3-Ei minimale

potentielle Energie. Deshalb ist der Abstand  $\sqrt{(Lp(t_0) - S(L))^2 + L^2q^2(t_0)}$  des Schwerpunkts vom Berührungspunkt  $(Lp(t_0), -Lq(t_0))$  der Eilinie mit der Unterlage kleinstmöglich. Also gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{p}(t_0) \left( p(t_0) - \frac{659}{1243} \right) + \dot{q}(t_0) q(t_0) \\ &= \frac{3}{31075} t_0 (t_0 - 1) (135487 t_0^3 - 156618 t_0^2 + 7458 t_0 + 18034) . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Berührungspunktparameter  $t_0 = 0,4905029082 \dots$ . Auf dem Eikörper bildet die Menge aller Berührungspunkte den “Berührkreis”. Sein Mittelpunktsabstand vom Hochpol ist

$$(40) \quad x_L := Lp(t_0) = 0,4857560755 \dots L ,$$

und als Radius erhalten wir

$$(41) \quad y_L := Lq(t_0) = 0,3734406580 \dots L .$$

Der Abstand vom Schwerpunkt ist damit

$$(42) \quad r_L := \sqrt{(x_L - S(L))^2 + y_L^2} = 0,3760723709 \dots L .$$

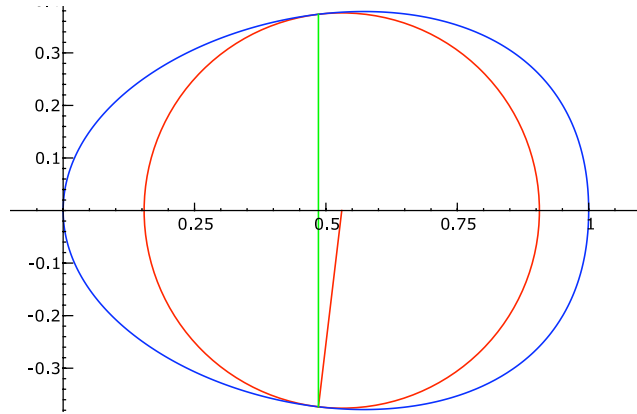


ABBILDUNG 10. Schwerpunkt und Minimalabstandskreis

### Neigungswinkel und Rollkreis

In ABBILDUNG 11 haben die bezeichneten Punkte folgende Bedeutungen:  $E$  Schwerpunkt,  $D$  Mittelpunkt des Berührkreises,  $C$  Hochpol,  $B$  Berührungspunkt der 2:3-Eilinie mit der Unterlage,  $A$  Mittelpunkt des “Rollkreises”. Die Streckenlängen sind also  $|BE| = r_L$ ,  $|BD| = y_L$ ,  $|CD| = x_L$  und  $|CE| = S(L)$ . Die Länge  $|AB|$  des Rollkreisradius bezeichnen wir mit  $R(L)$ .

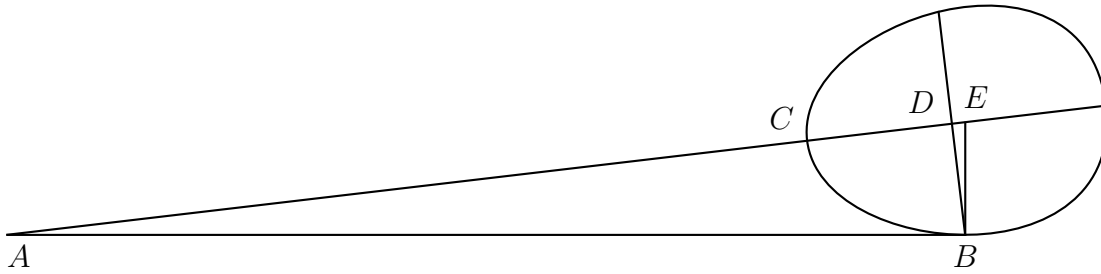


ABBILDUNG 11. Neigung und Rollkreisradius

Da der Abstand des Schwerpunkts von der Unterlage minimal ist, liegt  $E$  auf einer Normalen der Eilinie, d. h.  $\sphericalangle ABE$  stellt einen rechten Winkel dar. Als Höhe im Dreieck  $EAB$  steht  $DB$  senkrecht auf  $EA$ . Außerdem haben die Dreiecke  $EAB$  und  $EBD$  den Winkel  $\sphericalangle DEB$  gemeinsam. Damit sind diese Dreiecke ähnlich zueinander. Für den Neigungswinkel  $\alpha := \sphericalangle BAE$  der verlängerten Achse gilt insbesondere  $\alpha = \sphericalangle DBE$ . In den rechtwinkligen Dreiecken  $ABE$  und  $BDE$  erhalten wir also

$$\tan \alpha = \frac{r_L}{R(L)} = \frac{S(L) - x_L}{y_L}.$$

Daraus ergibt sich

$$(43) \quad \alpha = \frac{180}{\pi} \arctan \left( \frac{S(L) - x_L}{y_L} \right) = 6,782264997 \dots^\circ \text{ und}$$

$$(44) \quad R(L) = \frac{r_L y_L}{S(L) - x_L} = 3,162162496 \dots L.$$

## 8. VERGLEICHE

### Kegelschnitt-Eimodelle

Da wir bei der Definition der Praktikabilität von Eimodellen die “Ähnlichkeit” zur Vereinigung einer Halbkugel und eines Halbellipsoids verlangt haben, wollen wir nun diese Eigenschaft präzisieren und für das 2:3-Eimodell überprüfen. Dazu führen wir folgende Bezeichnung ein.

Ist  $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ , so heißt ein Eimodell  $\varrho$ -Kegelschnitt-Ei (mit der Achslänge  $L$ ), wenn es die Vereinigung einer Halbkugel mit dem Radius  $\varrho L$  und eines Halbellipsoids mit den Halbachsenlängen  $(1 - \varrho)L$  und  $\varrho L$  darstellt.

Wird mit *Cabri-Géomètre* oder *Cinderella 1.2* zu einem festen Halbkreis eine

Halbellipse mit variabler Länge konstruiert und über der Achse, die durch die Vereinigung entsteht, das 2:3-Ei gezeichnet, so ergeben  $\varrho$ -Werte zwischen 0,37 und 0,39 optisch eine gute Annäherung. Eine mit *Cinderella 1.2* erzeugte interaktive Ortslinie steht im *Mathkompass* [5] auf der Seite “Sonstiges”.

Für den numerischen Vergleich des 2:3-Eies mit  $\varrho$ -Kegelschnitt-Eiern bietet es sich an, die Schnittpunkte der in (27) bestimmten Normalen mit geeigneten  $\varrho$ -Kegelschnitt-Eiern gleicher Achslänge zu berechnen. Das prozentuale Verhältnis des Abstandsmaximums zur Achslänge kann dann als Maß für die Abweichung beziehungsweise die Ähnlichkeit dienen.

Es folgen hier zunächst die Formeln, die für die Berechnungen mit *Sage* verwendet werden. Dabei kürzen wir alle Funktionsterme durch Weglassen der Variablen  $t$  ab. Außerdem benutzen wir die Abkürzungen  $\sigma := 1 - \varrho$ ,  $\varphi := \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^2$ ,  $h := q + p \frac{\dot{p}}{\dot{q}}$ ,  $s_1 := \dot{p}^2 + \varphi \dot{q}^2$  und  $s_2 := h\dot{p} + \varphi \sigma \dot{q}$ . Für  $t \neq \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1)$  ergeben (27) und (21) wegen  $\dot{q}(t) \neq 0$  die Normalengleichung

$$(45) \quad y = h - x \frac{\dot{p}}{\dot{q}}.$$

Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem durch

$$(x - \sigma)^2 + y^2 = \varrho^2, \quad x \geq \sigma, \quad y \geq 0$$

gegebenen Viertelkreis und mit der durch

$$\varphi(x - \sigma)^2 + y^2 = \varrho^2, \quad x \leq \sigma, \quad y \geq 0$$

definierten Viertelellipse sind zu bestimmen. Dazu muss zunächst aus

$$(\varrho - q(t_1)) \dot{q}(t_1) + (\sigma - p(t_1)) \dot{p}(t_1) = 0$$

derjenige Parameter  $t_1$  berechnet werden, für den die zugehörige Normale durch den gemeinsamen Punkt  $(\sigma, \varrho)$  des Viertelkreises und der Viertelellipse verläuft. Die Parameterdarstellung der Schnittpunkte ist dann

$$(46) \quad x_s = \frac{|\dot{q}|}{s_1} \left( \text{sign}(\dot{q}) s_2 + \sqrt{s_2^2 - h^2 s_1} \right) \quad \text{und} \quad y_s = h - x_s \frac{\dot{p}}{\dot{q}}$$

mit  $0 \leq t \leq t_1$  für die Viertelellipse und mit  $t_1 \leq t \leq 1$  für den Viertelkreis.

Die mit *Sage* durchgeführten Berechnungen ergeben, dass das “prozentuale” maximale Abstandsverhältnis des 2:3-Eies von dem  $\varrho$ -Kegelschnitt-Ei

$$(47) \quad \Delta := \frac{100}{L} \max_{0 \leq t \leq 1} \sqrt{(p(t) - x_s(t))^2 + (q(t) - y_s(t))^2}$$

für  $0,3735 \leq \varrho \leq 0,3855$  kleiner als 1 ist, und der beste Wert  $\Delta = 0,639501 \dots$  wird für  $\varrho = 0,38116087 \dots$  angenommen.

Die folgende Präzisierung der geforderten ersten Eigenschaft von praktikablen Eimodellen ist natürlich in zweifacher Hinsicht willkürlich: Es wird ein nur optisch begründbarer Bereich für die zulässigen  $\varrho$ -Werte und eine ebenso subjektiv gewählte Grenze für die prozentuale maximale Abweichung festgelegt.

Ein Eimodell heißt *ähnlich zur Vereinigung einer Halbkugel und eines Halbellipsoids*, wenn es ein  $\varrho$  mit  $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{2}{5}$  gibt, so dass das Maximum der auf den Normalen des Eimodells gemessenen Abstände vom  $\varrho$ -Kegelschnitt-Ei im prozentualen Verhältnis zur Länge der gemeinsamen Achse kleiner als 1 ist.

Als Beispiel für das Erfülltsein dieser Bedingung bei dem 2:3-Eimodell wählen wir das  $\frac{3}{8}$ -Kegelschnitt-Ei, weil einerseits  $\frac{3}{8}$  unter allen Brüchen  $\varrho$  mit  $0,3735 < \varrho < 0,3855$  derjenige mit dem kleinsten Nenner ist und weil andererseits die Halbelipse des  $\frac{3}{8}$ -Kegelschnitt-Eies allein mit einem Papierstreifen wie in [ABBILDUNG 12](#) konstruiert werden kann.

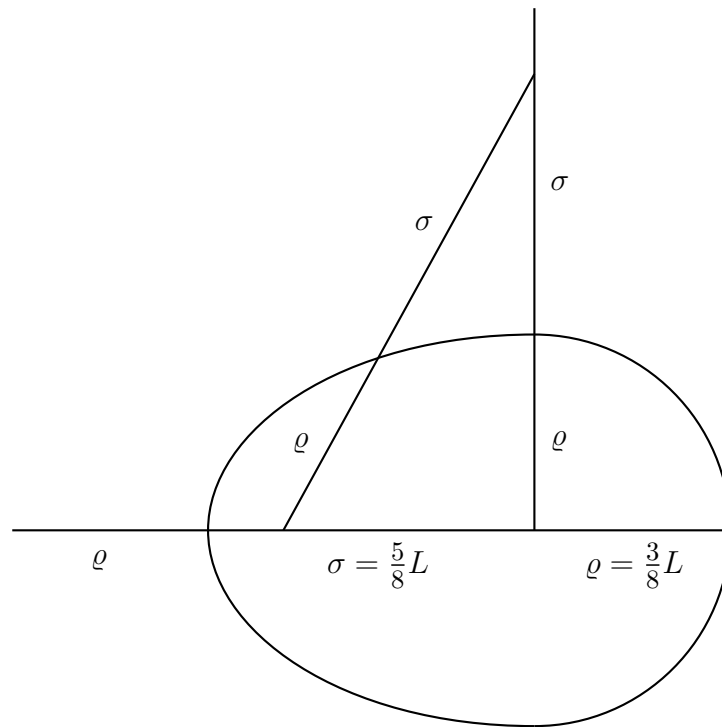


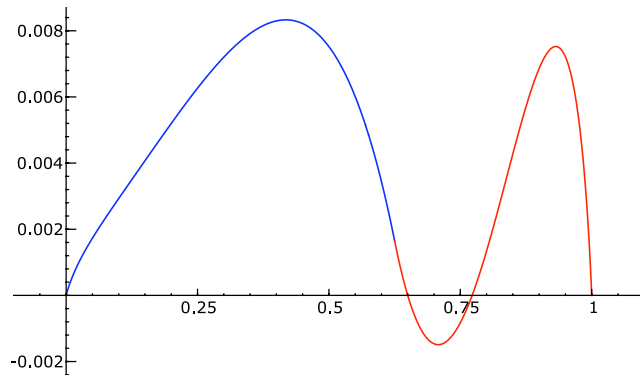
ABBILDUNG 12. Papierstreifenkonstruktion des  $\frac{3}{8}$ -Kegelschnitt-Eies

Auf dem Streifen, der dieselbe Länge wie die Achse hat, lässt sich durch Halbierungsfaltungen zunächst des ganzen Streifens, dann der ersten Hälfte und schließlich des entstandenen zweiten Viertels der Punkt  $P$  markieren, der den Streifen im Verhältnis 3:5 teilt. Werden die Endpunkte des Streifens an den im rechten unteren Eckpunkt eines Papierblatts zusammenstoßenden Kanten entlang geführt und die jeweilige Lage von  $P$  eingezeichnet, so erhält man eine Viertelellipse, die als Schablone für die  $\frac{3}{8}$ -Halbellipse dienen kann. Eine mit *Cinderella 1.2* erzeugte Animation der Papierstreifenkonstruktion der vollständigen Ellipse des  $\frac{3}{8}$ -Kegelschnitt-Eies steht im *Mathkompass* [5] auf der Seite “Sonstiges”.

Für  $\varrho = \frac{3}{8}$  ergibt (47) das maximale Abstandsverhältnis  $\Delta = 0,8330\dots$ . Definiert man die mit Vorzeichen versehene Abstandsfunktion durch

$$d := \left( t \rightarrow \text{sign}(q(t) - y_s(t)) \sqrt{(p(t) - x_s(t))^2 + (q(t) - y_s(t))^2}, [0, 1] \right),$$

so enthält **ABBILDUNG 13** den mit *Sage* geplotteten Graphen in Abhängigkeit von  $x$ .



**ABBILDUNG 13.** Graph  $(d \circ u)$  für das  $\frac{3}{8}$ -Kegelschnitt-Ei

### Kreisbogen-Eimodell

Als vorletzte Ausführung des mathematischen Teils vergleichen wir das 2:3-Ei mit einem Eimodell, dessen Querschnitttrand aus vier Kreisbögen besteht, die allein mit Lineal und Zirkel konstruiert werden können, wie aus **ABBILDUNG 14** zu entnehmen ist. Wir nennen das Modell deshalb “*Kreisbogen-Ei*”.

Die Kreisbögen haben folgende Mittelpunkte, Endpunkte und Radien:

	Mittelpunkt	Endpunkte	Radius
Halbkreisbogen	$D$	$G, F$	$r$
oberer Achtelkreisbogen	$G$	$F, H$	$2r$
Viertelkreisbogen	$C$	$H, I$	$s$
unterer Achtelkreisbogen	$F$	$I, G$	$2r$

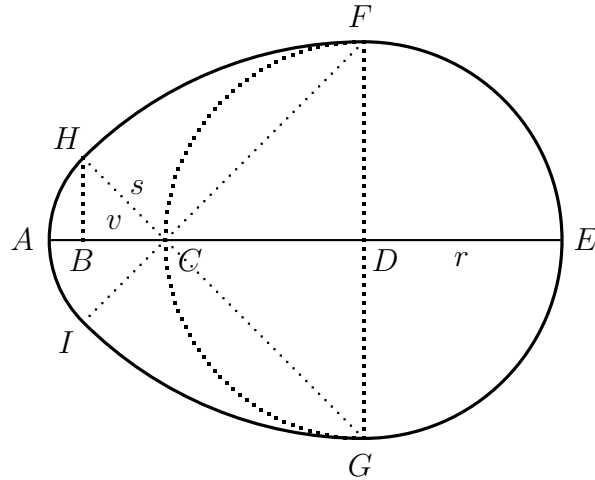


ABBILDUNG 14. Konstruktion des Kreisbogen-Eies

Aus  $2r + s = L$  und  $s = 2r - \sqrt{2}r$  folgt  $r = \frac{L}{14}(4 + \sqrt{2}) = 0,386 \dots L$ . Zur Bestimmung der Parameterwerte der ‐Grenznormalen‐, die durch  $F$  und  $H$  verlaufen, benötigen wir die Koordinaten von  $F$  und  $H$ . In dem bisher verwendeten Koordinatensystem des 2:3-Eies ist  $F = (s + r, r)$  und mit  $v := \frac{1}{\sqrt{2}}s = (\sqrt{2} - 1)r$  gilt  $H = (s - v, v)$ . Die zugehörigen Parameter sind  $t_F = 0,575 \dots$  und  $t_H = 0,150 \dots$ .

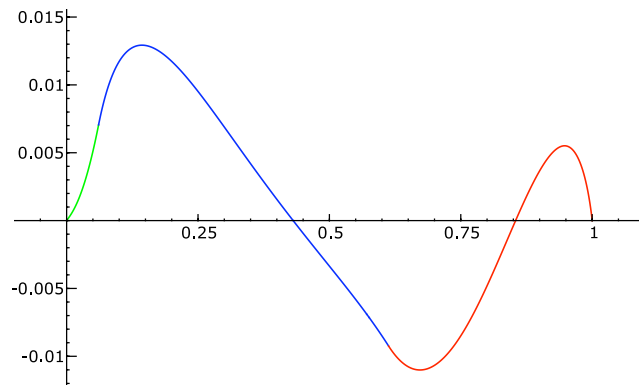


ABBILDUNG 15. Graph der Abstandsfunktion zum Kreisbogen-Ei

Der Graph der sonst analog zu (46) berechneten Abstandsfunktion in ABBILDUNG 15 besteht hier aus drei Teilen. Das maximale Abstandsverhältnis des Kreisbogen-Eies von dem 2:3-Ei auf den Eikurvennormalen tritt mit  $\Delta = 1,2927 \dots$  im ersten Viertel des Achtelkreisbogens auf.



## 9. ANWENDUNGEN

**Schokoladenei**

Wir wollen nun einem Schokoladenfabrikanten helfen, den Materialbedarf für 10000 Schokoladeneier mit der äußeren Form des 2:3-Eies zu berechnen, wenn die Achslänge 50 mm und die Schokoladendicke gleichmäßig 2,5 mm beträgt. Außerdem soll der Hohlraum zur Hälfte mit einem Fruchtsirup gefüllt und die Oberfläche mit einem 0,4 mm dicken Glasurüberzug versehen werden.

Da der Fabrikant ausdrücklich eine gleichmäßige Dicke der Schokolade wünscht und auch den dafür notwendigen Querschnitt der Innenform wissen möchte, stellen wir fest, dass unsere bisherigen Formeln nicht ausreichen; denn bei der Wahl eines 2:3-Eies der Achslänge 45 mm als Innenform mit 2,5 mm Abstand von den Polen wäre wegen (23) im Querschnitt die Ordinatendifferenz über der Maximumstelle höchstens  $\frac{1}{2}D(50) - \frac{1}{2}D(45) = 2,5 \cdot 0,7573 \dots = 1,89325 \dots$ , also nur rund  $\frac{3}{4}$  der Solldicke.

Wie bei dem Vergleich der Eimodelle im letzten Abschnitt ist auch hier die Abstandsbestimmung auf den Normalen der 2:3-Eikurve die sinnvollste Möglichkeit, die Dicke festzulegen. Wir bezeichnen mit  $\delta$  die relative Dicke im Verhältnis zu  $L$  und wählen  $\delta$  negativ, wenn nach innen abgetragen wird. Über die Schnittpunkte der durch (27) oder (47) gegebenen Normalen mit den Abstandskreisen  $(x - p(t))^2 + (y - q(t))^2 = \delta^2$  erhalten wir unter Berücksichtigung der geometrisch bedingten Vorzeichen die Koordinatenfunktionen

$$(48) \quad \begin{aligned} \xi_\delta &:= \left( t \rightarrow p(t) - \frac{\delta \dot{q}(t)}{\sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}, [0, 1] \right) \text{ und} \\ \eta_\delta &:= \left( t \rightarrow q(t) + \frac{\delta \dot{p}(t)}{\sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}, [0, 1] \right). \end{aligned}$$

Damit durch die Kurve  $\{(\xi_\delta(t), \eta_\delta(t)); t \in [0, 1]\}$  ein zusammenhängender Rotationskörper erzeugt werden kann, muss  $\eta_\delta(t) > 0$  für alle  $t$  mit  $0 < t < 1$  erfüllt sein. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$(49) \quad \delta > \delta_0 := - \min_{0 < t < 1} \frac{q(t)}{\dot{p}(t)} \sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)} = -0,238542 \dots$$

gilt. Die folgende ABBILDUNG 16 zeigt die 2:3-Eikurve zusammen mit den beiden Abstandskurven des obigen Falles, bei dem  $\delta = -0,05$  und  $\delta = 0,008$  ist.

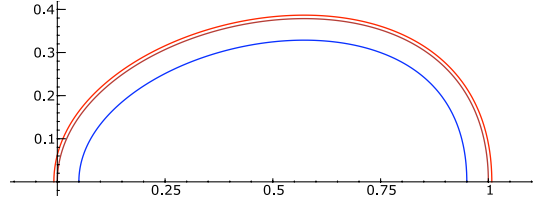


ABBILDUNG 16. Schokoladenei-Kurven

Um die Volumina dieser “Abstandskörper” wie bei dem 2:3-Eikörper herleiten zu können, muss  $\dot{\xi}_\delta(t) > 0$  für  $0 < t < 1$  gelten, so dass  $\xi_\delta$  eine streng monoton wachsende und damit umkehrbare Funktion darstellt. Mit den Ableitungsregeln des *Verknüpfungssatzes* [Seite 47] und mit der Ableitung der Wurzelfunktion [Seite 53] ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_\delta(t) &= \dot{p}(t) - \delta \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}(t)}{\sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}} \right) \\
 (50) \quad &= \dot{p}(t) - \delta \dot{p}(t) \frac{\dot{p}(t)\ddot{q}(t) - \dot{q}(t)\ddot{p}(t)}{(\sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)})^3} \\
 &= \dot{p}(t)(1 - \delta \varkappa(t)),
 \end{aligned}$$

wobei  $\varkappa$  die Krümmungsfunktion aus (34) ist. Damit gilt  $\dot{\xi}_\delta(t) > 0$  für  $0 < t < 1$  genau dann, wenn

$$(51) \quad \delta > \delta_1 := - \min_{0 < t < 1} \frac{1}{|\varkappa(t)|} = -0,238058\dots$$

erfüllt ist. Wegen (49) muss also  $\delta_1$  als untere Schranke für  $\delta$  gesetzt werden.

Die Bestimmung des Volumens der Abstandskörper erfolgt nun analog zum 2:3-Ei, wobei folgende Ersetzungen vorzunehmen sind:  $p$  durch  $\xi_\delta$ ,  $q$  durch  $\eta_\delta$  und  $f$  durch  $\eta_\delta \circ \xi_\delta^{-1}$ . Da  $\xi_\delta$  im Allgemeinen nicht die Symmetrieeigenschaft von  $p$  hat, muss außerdem  $1 - a_n$  durch  $b_n := \xi_\delta(1 - s_n)$  ersetzt werden. Als Verknüpfung von elementar stetigen Funktionen ist  $\xi_\delta$  elementar stetig. Der *Limesvertauschungssatz* [Seite 128] ergibt dann mit  $\lim_{n \in \mathbb{N}} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = -\delta$  und  $\lim_{n \in \mathbb{N}} (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 + \delta$  die neuen Integrationsgrenzen im Fall  $L = 1$ . Definiert man  $V_\delta(L)$  durch den von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängigen Grenzwert der Folge  $\left( \pi L^3 \int_{s_n}^{1-s_n} (t \rightarrow \dot{\xi}_\delta(t) \eta_\delta^2(t)) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  und

benutzt die Abkürzung  $\lambda(t) := \frac{\dot{p}(t)}{\sqrt{\dot{p}^2(t) + \dot{q}^2(t)}}$ , so gilt

$$\begin{aligned}
V_\delta(L) &= \pi L^3 \int_0^1 (t \rightarrow \dot{p}(t)(1 - \delta \varkappa(t))(q(t) + \delta \lambda(t))^2) \\
&= V(L) + (K_1 \delta + K_2 \delta^2 + K_3 \delta^3) L^3 \text{ mit} \\
(52) \quad K_1 &:= \pi \int_0^1 (t \rightarrow \dot{p}(t)q(t)(2\lambda(t) - q(t)\varkappa(t))) = 2,223034805 \dots = O(1), \\
K_2 &:= \pi \int_0^1 (t \rightarrow \dot{p}(t)\lambda(t)(\lambda(t) - 2q(t)\varkappa(t))) = 5,337554773 \dots \text{ und} \\
K_3 &:= -\pi \int_0^1 (t \rightarrow \dot{p}(t)\varkappa(t)\lambda^2(t)) = 4,188790204 \dots,
\end{aligned}$$

wobei der Zusammenhang zwischen  $K_1$  und  $O(1)$  durch den Grenzübergang

$$O(1) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \frac{1}{\delta} (V_\delta(1) - V(1)) = K_1$$

hergestellt werden kann.

Damit erhalten wir die Volumina  $V_{0,008}(5) = 40,3017 \dots$ ,  $V_{-0,05}(5) = 25,7442 \dots$  und  $V_0(5) = V(5) = 38,0357 \dots$ . Für 10000 Schokoladeneier werden also 122914  $\text{cm}^3$  Schokolade, 128721  $\text{cm}^3$  Fruchtsirup und 22660  $\text{cm}^3$  Glasurmasse benötigt. Da der Fabrikant die spezifischen Gewichte kennt, wird er die Mengenangaben in Gewichte umrechnen und zum Beispiel bei einem spezifischen Gewicht von 1,3  $\text{g/cm}^3$  für die Schokolade das Gesamtgewicht 159,788 kg erhalten. Besonders dankbar wird er aber für die exakte Berechnung sein, weil die übliche Näherung durch das Produkt aus Oberfläche und Dicke einen um 13,0% zu großen Wert und die Volumendifferenz zweier 2:3-Eiformen der Längen 5 cm und 4,5 cm einen um 16,1% zu kleinen Wert für den Schokoladenbedarf ergibt.

## Design

Bei vielen Designobjekten, die - wie manche Lampenschirme oder Schalen - einem Teil eines Eies ähneln, wurde die Form aus ästhetischen Gründen gewählt. Auch bei einigen Anwendungen, die im Internet im Zusammenhang mit Eimodellen zu finden sind - wie zum Beispiel der Überrollbügel eines Motorrollers oder die Kuppel eines Atomkraftwerks -, ist das Aussehen nicht durch Besonderheiten des Eies begründet. Bevor wir im nächsten Unterabschnitt eine Anwendung behandeln, die auf einer physikalischen Eigenschaft des Eies beruht, bringen wir zur

Entspannung von dem intensiven Mathematikeinsatz der bisherigen Abschnitte eine neue Anwendung, die auf der Individualität des 2:3-Eies beruht.

Wegen des näherungsweise vorliegenden Verhältnisses 7:9:12 der Äquatorposition zum Äquatordurchmesser und zur Achslänge hat das 2:3-Ei eine gut erkennbare, typische Form. Würden solche Eier aus Holz oder Kunststoff in verschiedenen Größen hergestellt, so könnten sie auf kleinen Pappringen oder auf Knetmasse in beliebigen Positionen und Neigungen zueinander aufgestellt werden. Es ist eine erstaunliche Leistung der Fantasie vieler Menschen, in einigen solcher Stellungen Personengruppen zu sehen. Geeignete Anordnungen für das damit mögliche "Fantasiespiel" und für Kontemplationsgelegenheiten nennen wir "*Eisemble*" (als Zusammenziehung von Ei-Ensemble). Es folgen einige Themenbeispiele, die sich auch mit *Sage* als Computergrafik darstellen lassen: Familienspaziergang, Singkreis, Tanzpaare, Ringkämpfer (siehe ABBILDUNG 17), Bocksprung, Schnelllaufstart, Eiskunstlauf und Fußballfreistoß.

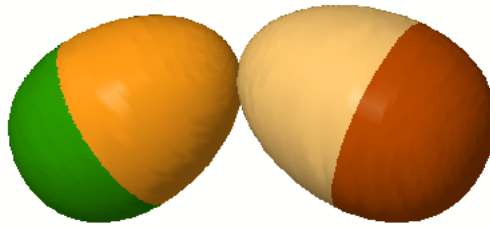


ABBILDUNG 17. *Eisemble* "Ringkämpfer"

Die Erörterung der kulturgeschichtlichen Bedeutung des Eies beginnt in der *Brockhaus Enzyklopädie* (F. A. Brockhaus, Wiesbaden, 1966-1974) mit den Sätzen: "Als Quelle des Lebens erscheint das Ei im Fruchtbarkeits- und Heilzauber, ebenso im Totenritual als Grabbeigabe und als Opfer. Im Mythos entsteht aus einem >Welt-Ei< die Welt. Diese Vorstellung kennen u. a. Polynesier, Peruaner, Japaner, Inder, Griechen." Darauf können wir hier nicht näher eingehen. Aber im Hinblick auf unser Thema ist es bemerkenswert, dass die Gebärmutter einer Frau kurz vor jeder Geburt in der Frontansicht einem 2:3-Ei mit unten liegendem Hochpol ähnelt. Um diesen nichtmathematischen Aspekt der Eiform bewusst werden zu lassen und um in den entsprechenden Unterrichtsfächern einen Anknüpfungspunkt zu bieten, führen wir folgende Symbolfigur ein:

Das “*Uter*”<sup>2</sup> ist ein 2:3-Ei, das auf einem Ring um den Hochpol steht und für das bei einer Achslänge  $L$  der Auflagekreis den Unterlagenabstand  $\frac{L}{20}$  und den Radius  $\frac{3L}{20}$  hat.



ABBILDUNG 18. Das *Uter*

Da das Ei und der Ring in den Punkten des Auflagekreises gleiche Tangentialebenen haben, muss der äußere Radius des Ringes  $0,191728\dots L$  und der innere  $0,146684\dots L$  sein.

Dem Vorbild der kostbaren *Fabergé-Eier* folgend, die ursprünglich seit 1885 von dem Goldschmied P. C. Fabergé und seiner Werkstatt in Sankt Petersburg für den russischen Zaren hergestellt und von ihm zu Ostern der Zarin geschenkt wurden, kann eine kleine goldene Uter-Figur eine Gabe als Ausdruck des Dankes und der Würdigung anlässlich einer Geburt sein.

## Architektur

In Telefongesprächen mit meinem älteren Sohn Arnold von Storp, der als Architekt in London arbeitet, ist eine faszinierende Anwendungsidee entstanden. Im Hinblick darauf, dass sich die Eiform durch die Evolution ergeben hat, um einen günstigen Druckverlauf bei der Eibewegung im Körper zu sichern, kann angenommen werden, dass sich die statischen Eigenschaften der am Äquator durchgeschnittenen Eioberfläche als Kuppeln architektonisch nutzen lassen - ähnlich wie in Japan die Struktur des Bambusrohrs Vorbild für erdbebensichere Hochhäuser geworden ist.

Da als Gebäudekuppeln, die nur ihr Eigengewicht tragen müssen, Halbkugeln oder von Teilen der Kettenlinie erzeugte Rotationsflächen genügen, hatte Arnold die Idee, für Unterwassergebäude, die der Druckänderung bei zunehmender Wassertiefe standhalten müssten, “Hochkuppeln” zu verwenden, die die Form des Hochpolteils eines am Äquator durchgeschnittenen 2:3-Eies haben (ABBILDUNG 19).

<sup>2</sup> Die Bezeichnung stellt den Durchschnitt von Uterus und Mutter dar.

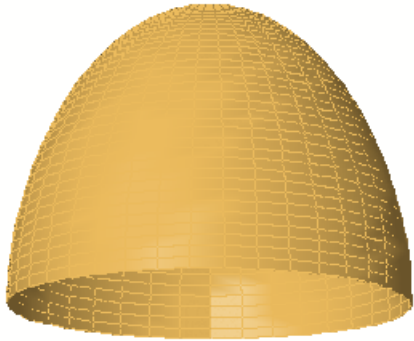


ABBILDUNG 19. Hochkuppel

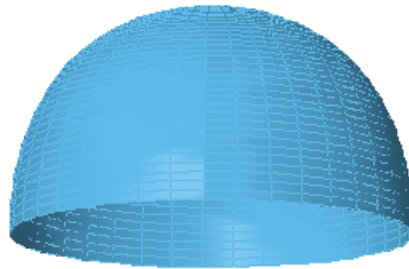


ABBILDUNG 20. Flachkuppel

Eine als Archiv zugängliche Fernsehsendung von *3sat* am 24.11.2008 über “Schwimmende Städte - Neue Heimat auf dem Wasser?” (<http://www.3sat.de/mediathek/mediathek.php?obj=10290>) hat Arnolds Idee konkreter werden lassen. In den Niederlanden und in mindestens sieben weiteren Ländern der Erde gibt es ausgedehnte “Depressionsgebiete”, bei denen wegen des steigenden Meeresspiegels schon in naher Zukunft mit einer vollständigen Überflutung zu rechnen ist. Die *3sat*-Sendung berichtete unter anderem über zwei Projekte in den Niederlanden, wo etwa ein Drittel der Siedlungsfläche verloren gehen würde. Bei dem ersten Beispiel folgen einige schon gebaute Häuser von zwei Säulen geführt dem steigenden Wasserspiegel. Für das zweite Modell, das sich noch in der Planung befindet, soll ein Polder geflutet werden, um eine “schwimmende Stadt” auf Pontons zu errichten.

Bei diesen Projekten ist festzustellen, dass sie die zu erwartenden Orkane als Folge des Klimawandels überhaupt nicht berücksichtigen. Es ist deshalb Arnolds Vision, Hochkuppeln auf dem noch trockenen Boden mit vorgefertigten Bauteilen zu errichten und auch zu nutzen. Da sie unter anderem durch Schleusenkammern vollständig für die Überflutung vorbereitet werden können, nennt Arnold sie “*Noah-Kuppeln*” (“*Noah domes*”).

Aber auch herkömmliche Gebäude mit senkrechten Wänden würden den möglichen Superorkanen mit Windgeschwindigkeiten von mehr als 300 km/h nicht standhalten, wie etwa der letzte Hurrikan 2008 in Texas gezeigt hat. Wegen der raschen Abnahme des Wellendrucks unter der Wasseroberfläche könnten deshalb *Noah-Kuppeln* auch in künstlichen Gewässern als Schutz vor Superorkanen dienen. Auf jeden Fall wäre jede frühzeitig gebaute *Noah-Kuppel* ein Mahnmal gegen die von Menschen verursachte Zerstörung der Lebensbedingungen auf der Erde.

## 10. EIMODELLE IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Dieser Artikel wurde durch einen Vorabdruck des Beitrags [10] angeregt. Auf 79 Seiten werden dort zahlreiche mathematische Aspekte des Modellierens am Beispiel des Eies erörtert und SchülerInnenaktivitäten angeleitet. Dabei wird klar, dass das Ei durch seine Stellung in der Hierarchie der räumlichen Gebilde zwischen Ellipsoid und konvexem Rotationskörper für den Mathematikunterricht gut geeignet ist, dass aber die angemessene mathematische Behandlung mit Parameterdarstellungen bisher nicht zur Verfügung steht. Deshalb will dieser Aufsatz zumindest für einen Ausblick diese leistungsfähige Methode mit ihren zahlreichen Vorteilen bereitstellen. Weitere Anregungen für den fächerübergreifenden Mathematikunterricht sind unter anderem in [1], [2], [3], [4] und [11] zu finden.

## 11. PRAKTIKABILITÄT UND STANDARD

In den mathematischen Abschnitten wurde gezeigt, dass das 2:3-Ei die erste und dritte Eigenschaft der am Anfang definierten praktikablen Eimodelle besitzt. Die Bedingung der einfachen Realisierbarkeit mit plotfähigen CA-Systemen ist zum Beispiel durch die *Sage*-Programme erfüllt, die auch im *Mathkompass* zugänglich sind. Wegen der praktischen Bedeutung des Modells sei berichtet, dass mein oben erwähnter Sohn das 2:3-Ei in ABBILDUNG 21 nach meiner telefonischen Durchsage der Stützpunkte für die erzeugende Bézier-Kurve mit dem CAD-System *MicroStation*<sup>TM</sup> innerhalb von drei Minuten konstruiert hat.

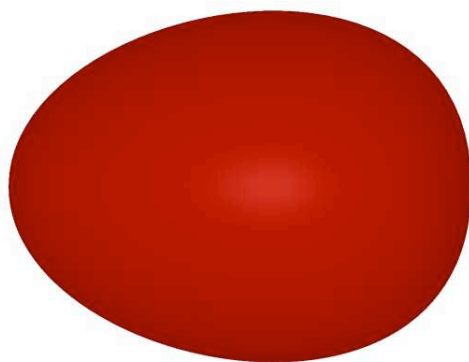


ABBILDUNG 21. 2:3-Ei von dem CAD-System *MicroStation*

Natürlich gibt es kein “ideales” Ei. Im Hinblick auf die vielen Vorteile gegenüber bisherigen Eimodellen kann aber das 2:3-Ei als *Standard-Eimodell* gelten.

## LITERATUR

- [1] Gengelbach, Arve: *Ei, Ei, Ei, ... oder die Stabilität von Eierschalen*. (Schüler experimentieren, 2002) Internet: <https://www.jugend-forscht.de/index.php/file/download/3391>.
- [2] Köller, Jürgen: *Eiliniien*. Internet: <http://mathematische-basteleien.de/eiliniien.htm>.
- [3] Laakmann, Heinz: *Das Ei - eine mathematische Herausforderung*. Internet: [http://miami.uni-muenster.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-1377/Das\\_Ei.pdf](http://miami.uni-muenster.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-1377/Das_Ei.pdf).
- [4] *Mathematisches Eierlei*. Internet: <http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/projekt/mathei/index.html>.
- [5] *Mathkompass*. Internet: <http://wwwmath.uni-muenster.de/u/mollerh>.
- [6] Möller, Herbert: *Die GaPFilL-Methode zur Erzeugung von L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-picture-Umgebungen (How to Generate L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Picture Environments Using the GaPFilL Method)*; 2006; Internet: <http://dante.ctan.org/CTAN/graphics/gapfill/GaPDoc1.pdf>.
- [7] Möller, Herbert: *Elementaranalysis* (E-Skript); Pdf-Datei (276 Seiten, 3 MB); Internet: *Mathkompass* 2008.
- [8] Möller, Herbert: *Raumalgebra* (E-Skript); Pdf-Datei (39 Seiten, 727 KB); Internet: *Mathkompass* 2003.
- [9] Stein, William, *Sage: Open Source Mathematical Software (version 3.2.3)*, The Sage Group, 2009. Internet: <http://www.sagemath.org>.
- [10] Siller, Hans-Stefan, Maaß, Jürgen und Fuchs, Karl Josef: *Wie aus einem alltäglichen Gegenstand viele mathematische Modellierungen entstehen - Das Ei als Thema des Mathematikunterrichts*. In: H.-St. Siller und J. Maaß (Hrsg.): *Modellieren lernen in der Schule*, ISTRON Bd. 14, ISBN 978-3-88120-452-1, 2009.
- [11] Sillke, Torsten: *Egg-curves*. Internet: <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/egg-curves>.

Abgeschlossen am 27.2.2009

Letzte Korrektur am 28.4.2009