Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 06**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 22.06.06, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Element $A \in M(n,K)$ des Matrizenrings $M(n,K)$ über einem Körper K, mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
a) Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$, so daß

$$a_0 E_n + a_1 A + \ldots + a_{m-1} A^{m-1} + A^m = 0 \in M(n,K)$$

gilt.
b) Ist $A \in \mathrm{GL}\,(n,K)$, so gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_m \in K$, so daß

$$A^{-1} = a_0 E_n + a_1 A + \ldots + a_{m-1} A^{m-1}$$

gilt.

Aufgabe 2. a) Zeigen Sie, daß eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2,K)$ genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Ihr Inverses ist dann $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.
b) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t^2 & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

Aufgabe 3. Man invertiere mit dem Verfahren der Vorlesung die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Für welche $c \in K$ ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -c \\ c-1 & -2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$
(i) eindeutig lösbar,
(ii) lösbar,
(iii) nicht lösbar

Aufgabe 5. Im $\mathbb{R}^7$ sei

$$U_1 := \mathrm{span}((1,1,2,1,2,2,1),\ (1,0,2,1,1,1,1),\ (0,1,1,0,1,1,1))\ ,$$
$$U_2 := \mathrm{span}((1,5,2,0,1,1,1),\ (0,4,0,-1,-1,-1,0),\ (2,5,4,1,2,2,2))\ .$$

Man bestimme eine Basis von $U_1 \cap U_2$.