Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 11**

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 19.04.2011, 12 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Vektorraum und $f\colon X \to \mathbb{C}$ linear. Zeige:

(a) Wenn f nicht stetig ist, so existiert für jedes $\lambda > 0$ und jede Umgebung U von $0 \in X$ ein $x \in U$ mit $f(x) = \lambda$.

(b) Wenn f nicht stetig ist, dann ist $\ker f \subseteq X$ dicht.

(c) f ist stetig genau dann, wenn $\ker f \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$ und $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$. Bestimme *obere Schranken** für die Operatornorm der Abbildung $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_s) \to (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_t)$, $x \mapsto Ax$, für

(a) $s = t = 1$, (b) $s = \infty,\ t = 1$, (c) $s = 1,\ t = \infty$, (d) $s = t = 2$,

wobei $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ für $p \in (1, \infty)$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Aufgabe 3. Sei $k \geq 0$, $a < b$ und $C^k([a,b])$ der Vektorraum aller auf $[a,b]$ stetigen und auf (a,b) k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|f\| := \sum_{l=0}^{k} (b-a)^l \sup_{t \in (a,b)} |f^{(l)}(t)|.$$

(a) Zeige, dass $C^k([a,b])$ bezüglich dieser Norm vollständig ist.

(b) Prüfe, für welche Zahlen $m \geq 0$ die Abbildungen $D, I\colon C^k([a,b]) \to C^m([a,b])$,

$$(Df)(t) := f'(t), \qquad (If)(t) := \int_a^t f(t)dt,$$

wohldefiniert und stetig sind, und bestimme gegebenenfalls *obere Schranken** für die Operatornormen $\|D\|$ und $\|I\|$.

Aufgabe 4. Sei X ein normierter Raum, $\mathcal{CF}(X)$ die Menge aller Cauchy-Folgen und $[(x_n)_n] = \{(y_n)_n \in \mathcal{CF}(X) : \lim_n \|y_n - x_n\| = 0\}$ für jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$. Dann ist $\widehat{X} = \{[(x_n)_n] : (x_n)_n \in \mathcal{CF}(X)\}$ ein normierter Raum, wobei

$$\lambda[(x_n)_n] = [(\lambda x_n)_n], \quad [(x_n)_n] + [(y_n)_n] = [(x_n + y_n)_n], \quad \|[(x_n)_n]\| = \lim_n \|x_n\|.$$

---

*geändert

(a) Zeige, dass $\hat{X}$ vollständig ist.

(b) Konstruiere eine Abbildung $\iota_X\colon X \to \widehat{X}$ mit folgender universeller Eigenschaft: Zu jedem vollständigen normierten Raum Y und jedem $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt es genau ein $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ mit $T = \widetilde{T} \circ \iota_X$.

(c) Folgere[†]: Ist Y ein normierter Raum, $\widehat{Y}$ analog zu $\widehat{X}$ definiert und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so existiert genau ein $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, \widehat{Y})$ mit $\widehat{T} \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$.

[†] In der letzten Formel wurde ein Fehler korrigiert