Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 17.05.2011, 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Sei X ein normierter Raum. Zwei abgeschlossene Unterräume $M, N \subseteq X$ heißen *topologisch komplementär*, falls $M + N = X$ und $M \cap N = \{0\}$.

Sei $M \subseteq X$ ein endlich-dimensionaler Unterraum mit Basis $x_1, \ldots, x_n$. Zeige:

(a) M ist abgeschlossen. (*Hinweis:* Benutze, dass jeder normierte endlich-dimensionale Raum vollständig ist.)

(b) Es gibt $\delta_1, \ldots, \delta_n \in X'$ mit $\delta_i(x_j) = \delta_{i,j}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol ist. (*Hinweis:* Anwendung von Hahn-Banach.)

(c) M und $N := \bigcap_{i=1}^{n} \ker \delta_i$ sind topologisch komplementär.

Aufgabe 2. Sei wieder X ein normierter Raum und sei $M \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum mit endlicher Kodimension, also $\dim X/M < \infty$. Zeige: Dann existiert ein abgeschlossener Teilraum $N \subseteq X$ mit der Eigenschaft, dass M, N topologisch komplementär sind. (*Hinweis:* Benutze eine Basis von X/M.)

Aufgabe 3. Sei $c_0 \subset \ell^\infty$ der Unterraum aller Nullfolgen und $(-|-)\colon \ell^1 \times \ell^\infty \to \mathbb{C}$ definiert durch $(x|y) := \sum_n x_n y_n$ für alle $x = (x_n)_n \in \ell^1$, $y = (y_n)_n \in \ell^\infty$. Ferner sei für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $\epsilon^{(k)} = (\epsilon_n^{(k)})_n \in c_0 \cap \ell^1$ definiert durch $\epsilon_n^{(k)} = \delta_{k,n}$. Zeige:

(a) Für jedes $x \in \ell^1$ ist $(x|-)\colon c_0 \to \mathbb{C}$, $y \mapsto (x|y)$, linear und stetig, und für jedes $y \in \ell^\infty$ ist $(-|y)\colon \ell^1 \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x|y)$, linear und stetig.

(b) Die Abbildungen $\ell^1 \to (c_0)'$, $x \mapsto (x|-)$, und $\ell^\infty \to (\ell^1)'$, $y \mapsto (-|y)$, sind isometrisch.

(c) Die Abbildungen in (b) sind surjektiv. (*Hinweis:* Betrachte für $\phi \in (c_0)'$ die Folge $(\phi(\epsilon^{(k)}))_k$ und für $\psi \in (\ell^1)'$ die Folge $(\psi(\epsilon^{(k)}))_k$.)

(d) c_0 ist nicht reflexiv.

Aufgabe 4. Sei Y ein normierter Raum (ungleich 0) und X ein kompakter Hausdorff-Raum mit einem endlichen Maß μ, also $\mu(X) < \infty$. Bezeichne $C(X, Y)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen von X nach Y mit punktweise definierter Skalarmultiplikation und Addition. Zeige:

(a) Durch $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ wird eine Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $C(X, Y)$ definiert.

(b) Für jedes $f \in C(X,Y)$ ist die folgende lineare Abbildung I_f stetig:

$$I_f\colon Y' \to \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \int_X \phi \circ f d\mu.$$

(c) Die Abbildung $I\colon C(X,Y) \to Y''$, $f \mapsto I_f$, ist linear und $\|I\| = \mu(X)$.

(d) Ist Y reflexiv, so existiert für jedes $f \in C(X,Y)$ genau ein $y \in Y$ mit $\phi(y) = \int_X (\phi \circ f) d\mu$ für alle $\phi \in Y'$. (*Bemerkung:* Man schreibt dann $y = \int_X f d\mu$.)