Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 21.06.2011, 12 Uhr Blatt 10

Sei $(x_\nu)_{\nu\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum X. Ein *Teilnetz* von $(x_\nu)_\nu$ ist ein Netz der Form $(x_{p(\mu)})_{\mu\in J}$, wobei $p\colon J \to I$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\forall \mu, \mu' \in J : \mu \le \mu' \Rightarrow p(\mu) \le p(\mu'), \qquad \forall \nu \in I \exists \mu \in J : p(\mu) \ge \nu.$$

Aufgabe 1. (a) Sei X ein topologischer Vektorraum und $C \subseteq X$ konvex. Zeige mit Hilfe von Netzen, dass der Abschluss von C wieder konvex ist.

(b) Sei $(x_\nu)_{\nu\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum X und sei $x \in X$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) $x \in \bigcap_{\nu\in I} \overline{\{x_{\nu'} : \nu' \ge \nu\}}$;

ii) für jedes $\nu \in I$ und jede Umgebung U von x existiert ein $\nu' \in I$ mit $\nu' \ge \nu$ und $x_{\nu'} \in U$;

iii) $x = \lim_\mu x_{p(\mu)}$ für ein Teilnetz $(x_{p(\mu)})_{\mu\in J}$ von $(x_\nu)_{\nu\in I}$.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so heißt x *Häufungspunkt* von $(x_\nu)_{\nu\in I}$. (*Hinweis:* Verwende für ii)⇒iii) als Indexmenge J alle Paare (ν', U) wie in ii).)

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Die Kompaktheit von X kann mit Hilfe von Netzen wie folgt charakterisiert werden.

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, das heißt, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Konstruiere ein Netz $(x_\nu)_{\nu\in I}$, für das jeder Häufungspunkt in $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ liegt. (*Hinweis:* Verwende als Indexmenge I das System aller endlichen Teilmengen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, geordnet durch Inklusion.)

(b) Zeige, dass X genau dann kompakt ist, wenn jedes Netz $(x_\nu)_\nu$ in X einen Häufungspunkt besitzt.

Die folgenden Aufgaben zeigen, warum bei der Betrachtung von L^p- und ℓ^p-Räumen stets $1 \le p \le \infty$ angenommen wird: *Für $p \in (0,1)$ ergibt die übliche Formel keine Norm.* Man kann zwar eine sinnvolle Topologie definieren, aber diese ist nicht einmal lokal-konvex!

Aufgabe 3. Sei $p \in (0,1)$ und $\ell^p \subset \ell^\infty$ die Menge aller Folgen $x = (x_n)_n$ mit $|x|_p := \sum_n |x_n|^p < \infty$. Zeige:

(a) $\ell^p \subset \ell^\infty$ ist ein Unterraum und durch $d(x,y) := |x-y|_p$ wird eine Metrik auf ℓ^p definiert.

(b) Bezüglich der Topologie, welche durch die Metrik aus (a) erzeugt wird, ist $\ell^p \subset \ell^\infty$ ein topologischer Vektorraum.

(c) Die Abbildung $x \mapsto (|x|_p)^{1/p}$ ist keine Norm.

Aufgabe 4. Seien $p, \ell^p, |\cdot|_p$ wie in Aufgabe 3 und $x^{(k)} \in \ell^p$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiert durch $x_n^{(k)} := \delta_{n,k} k^{p-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Die Folge $(x^{(k)})_k$ konvergiert gegen 0 und die Menge $K := \{0\} \bigcup \{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ ist kompakt.

(b) Die konvexe Hülle $\mathrm{conv}(K)$ von K ist unbeschränkt in dem Sinn, dass $\sup\{|x|_p : x \in \mathrm{conv}(K)\} = \infty$. (*Hinweis:* Schätze $|(x^{(1)} + \cdots + x^{(k)})/k|_p$ für $k = 2^m$ mit Standardmethoden ab.)

(c) Jede konvexe offene Teilmenge U von ℓ^p ist unbeschränkt. (*Bemerkung:* Daraus folgt, dass die Topologie von ℓ^p nicht lokal-konvex ist.)