Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 12**

Übung zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 21.06.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\det C(m,n) = 1$, wobei

$$C(m,n) = \begin{pmatrix} 1 & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{n} \\ 1 & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \cdots & \binom{m+1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{m+n}{1} & \binom{m+n}{2} & \cdots & \binom{m+n}{n} \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 3(c) von Blatt 1 des letzten Semesters.)

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\det A(n) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$, wobei

$$A(n) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (a) *(Vandermonde-Determinante)* Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ und

$$B(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie per Induktion, dass $\det B(n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Das *Kreuzprodukt* $v \times w$ zweier Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ im $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $u, v, w, x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $v \times w$ ist orthogonal zu v und w.

(b) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$.

(c) $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \alpha$, wobei α den (kleineren) Winkel zwischen v und w bezeichne.

(d) Der Abstand zweier windschiefer Geraden $u + \mathbb{R}x$ und $v + \mathbb{R}y$ ist gegeben durch $|\langle u - v, x \times y\rangle| / \|x \times y\|$.

Aufgabe 4. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ und sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M(n \times (n+1), \mathbb{R})$ die Matrix mit den Zeilen $a_1, \ldots, a_n$. Für $k = 1, \ldots, n+1$ sei $A(k) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix, die man erhält, wenn man die k-te Spalte von A streicht, und $b_k = (-1)^{k-1} \det A(k)$. Zeigen Sie, dass für $b = (b_1, \ldots b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ folgende Aussagen gelten:

(a) $b = a_1 \times a_2$ im Fall $n = 2$;

(b) $\langle a_k, b\rangle = \det \begin{pmatrix} a_k \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ für $k = 1, \ldots, n$;

(c) b ist orthogonal zu $a_1, \ldots, a_n$.