Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2015**

Übungen zu "Mathematische Modelle der Statistischen Physik und Quantenfeldtheorie"

Abgabe: Bis 25.06.2015, 10 Uhr Blatt 07

Dieses Blatt diskutiert die *van der Waals-Gleichung*

$$\Big(p+\frac{a}{V^2}\Big)(V-b)=RT$$

als Modell für kritische Phänomene beim Phasenübergang flüssig$\leftrightarrow$ gasförmig. Nach Skalierung $V\mapsto bV$, $p\mapsto \frac{a}{b^2}p$, $T\mapsto \frac{a}{Rb}T$ können wir $a=b=R=1$ annehmen.

Aufgabe 1. Für festes T heißt die Lösung $p(V)$ eine *Isotherme*. Die freie Energie einer Isothermen ist definiert als $F(V)=F(V_0)-\int_{V_0}^{V}dV\;p(V)$.

i) Berechnen Sie $F(V)$ für $V,V_0>b$.

ii) Zeigen Sie: Ist T genügend klein, aber positiv, dann gibt es ein $p>0$, so daß $V(p)$ drei Lösungen hat. *Hinweis:* Diskriminante der Cardanischen Formeln

iii) Aus Stabilitätsgründen muß für physikalische Systeme gelten: $\frac{1}{\kappa}=-V\frac{\partial p}{\partial V}=\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\geq 0$. Sei T so klein, daß $V(p)$ drei Lösungen hat. Zeigen Sie: Die Stabilitätsbedingung ist für genau zwei der drei Lösungen erfüllt.

Aufgabe 2. Nach Maxwell ist die freie Energie $F(V)$ zu ersetzen durch den Rand $F^{conv}(V)$ ihrer konvexen Hülle. Letztere ist definiert als die Menge aller konvexen Linearkombinationen: Ist $\Gamma(F):=\{(V,F(V)\}$ der Graph von F, dann ist

$$\mathrm{conv}(\Gamma(F)):=\{\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2\;:\;\lambda\in[0,1]\,,\;\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma(F)\}\,.$$

i) Zeigen Sie: Gibt es zu T drei Lösungen V, so gibt es $V_f<V_g$ derart, daß

$$F^{conv}(V)=\begin{cases}F(V) & \text{für } V<V_f \text{ oder } V>V_g\\ \frac{(V-V_f)F(V_g)+(V_g-V)F(V_f)}{V_f-V_f} & \text{für } V_f<V<V_g\end{cases}$$

ii) Geben Sie ein System aus zwei Gleichungen an, aus denen sich zu gegebenem T die beiden Volumina V_f,V_g bestimmen (ohne das System zu lösen)

Aufgabe 3. Die kritische Punkt ist definiert als jenes Paar (T_c, p_c), an dem die van der Waals-Gleichung entartet zu $(V - V_c)^3 = 0$ mit dreifacher reeller Nullstelle.

i) Bestimmen Sie T_c, p_c, V_c.

ii) Formen Sie die van der Waals-Gleichung in eine Gleichung $\frac{p-p_c}{p_c} = f\left(\frac{T-T_c}{T_c}, \frac{V-V}{V_c}\right)$ um.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die kritischen Exponenten

i) des Verhaltens $|V - V_c| \simeq |p - p_c|^{\frac{1}{\delta}}$ für $T = T_c$

ii) der Kompressibilität $\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big|_{V=V_c} \simeq \tau^{-\gamma}$ für $\tau = \frac{|T-T_c|}{T_c} \to 0$,

iii) der Dichtedifferenz $V_g - V_f \simeq \tau^{\beta}$ mit $\tau = \frac{|T-T_c|}{T_c}$ für $T \nearrow T_c$

iv) der spezifische Wärme $c = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big|_{p=p_c} \simeq \tau^{-\alpha}$